

Оглавление

Список обозначений	3
Глава 1. Задачи теории упругости	6
1.1. Конструкция и ее расчетная схема	6
1.2. Гипотезы	10
1.3. Основные задачи	14
1.4. Вариационные задачи	20
Глава 2. Метод конечных элементов	25
2.1. Конечные элементы метода перемещений	25
2.2. О связи с проекционно-сеточными методами	31
2.3. Гибридная схема МКЭ	32
2.4. О погрешности решения	34
2.5. Критерий полноты	37
2.6. Устойчивость дискретной задачи	41
2.7. Критерий несовместности	42
2.8. Оценки скорости сходимости метода	44
2.9. Внутренние степени свободы конечных элементов	47
2.10. О системах координат	49
2.11. Построение систем аппроксимирующих функций	52
2.12. Метод подобластей (<i>SubAreas, SA</i>)	54
Глава 3. Трехмерная задача теории упругости	59
3.1. Основные уравнения	59
3.2. Степени свободы трехмерных конечных элементов	68
3.3. Конечные элементы с полиномиальными аппроксимациями	69
3.3.1. Тетраэдр с узлами в вершинах	70
3.3.2. 10-ти узловой тетраэдр	70
3.3.3. Прямой параллелепипед с узлами в вершинах	71
3.3.4. Прямой 20-ти узловой параллелепипед	72
3.3.5. Прямая треугольная призма с узлами в вершинах	73
3.3.6. Прямая треугольная 15-ти узловая призма	73
3.4. Изопараметрические конечные элементы	74
3.5. О точности элементов	77
3.6. Тесты	78
3.6.1. Патологические (patch) тесты	79
3.6.2. Расчет толстой прямоугольной плиты	81
3.6.3. Расчет толстой круглой плиты	82
3.6.4. Задача Лява	83
3.6.5. Задача Бусинеска о действии на упругое полупространство нормальной силы	85
Глава 4. Плоская задача теории упругости	86
4.1. Плоское напряженное состояние	86
4.2. Плоская деформация	91

4.3.	Степени свободы и аппроксимации	92
4.4.	Элементы с двумя степенями свободы узла	96
4.4.1.	Треугольник с узлами в вершинах	96
4.4.2.	Шестиузловой треугольник	97
4.4.3.	Треугольные элементы (<i>SA</i>).....	98
4.4.4.	Треугольники серендипового типа	99
4.4.5.	Прямоугольник с узлами в вершинах	100
4.4.6.	Восьмиузловой прямоугольник.....	100
4.4.7.	Прямоугольные элементы серендипового типа.....	101
4.4.8.	Четырехугольные элементы (<i>SA</i>)	102
4.4.9.	Четырехугольники с двумя узлами на стороне.....	107
4.4.10.	Изопараметрические элементы	108
4.5.	Элементы с квазивращательными степенями свободы (<i>QRDF</i>).....	109
4.5.1.	Трехузловой элемент (<i>QRDF3</i>).....	109
4.5.2.	Четырехузловой изопараметрический элемент (<i>QRDF4IP</i>)	111
4.5.3.	Четырехузловой элемент (<i>QRDF4SA</i>).....	112
4.6.	Несовместные элементы (<i>DDFIC</i>).....	114
4.6.1.	Алгоритм построения несовместных элементов	114
4.6.2.	Треугольник с узлами в вершинах (<i>DDF3IC</i>)	115
4.6.3.	Шестиузловой треугольник (<i>DDF6IC</i>)	117
4.6.4.	Прямоугольник с узлами в вершинах (<i>DDF4RIC</i>).....	119
4.6.5.	Прямоугольник с промежуточными узлами на сторонах (<i>DDF8IC</i>) ..	120
4.6.6.	Четырехугольник (<i>DDF4ISA</i>)	121
4.6.7.	Восьмиузловой четырехугольник (<i>DDF8ISA</i>).....	122
4.7.	Совместные элементы (<i>DDFSA</i>)	124
4.7.1.	Треугольник с узлами в вершинах (<i>DDF3SA</i>).....	124
4.7.2.	Треугольник шестиузловой (<i>DDF6SA</i>)	125
4.7.3.	Четырехугольник с узлами в вершинах (<i>DDF4SA</i>).....	126
4.7.4.	Восьмиузловой четырехугольник (<i>DDF8SA</i>).....	127
4.8.	Тесты	127
4.8.1.	Патологические (patch) тесты	128
4.8.2.	Температурные деформации	130
4.8.3.	Узкая прямоугольная пластина	130
4.8.4.	Пластина с прямым изгибом.....	133
4.8.5.	Задача Cook	135
4.8.6.	Изгиб неограниченного клина сосредоточенным моментом, приложенным к его вершине (задача Инглиса)	137
4.8.7.	Изгиб прямоугольной балки-стенки, жестко подвешенной по боковым сторонам, под действием равномерно распределенной нагрузки, расположенной на верхней стороне.....	138
4.8.8.	Анализ результатов	140
Глава 5.	Стержни.....	142
5.1.	Гипотезы	142
5.2.	Сжато-растянутый стержень.....	143
5.3.	Балка Бернулли	144
5.3.1.	Уравнения.....	144
5.3.2.	Учет сдвиговых деформаций.....	146
5.3.3.	Преднапряжение и сдвиг	147

5.3.4.	Степени свободы и аппроксимирующие функции	148
5.4.	Балка Тимошенко	151
5.5.	Кручение	155
5.6.	Пространственный стержень	156
5.7.	Тесты	157
Глава 6.	Тонкие плиты (теория Кирхгоффа-Лява)	159
6.1.	Теория изгиба тонких пластин Кирхгоффа-Лява	159
6.2.	Степени свободы и аппроксимации	164
6.3.	Прямоугольные конечные элементы	166
6.3.1.	Элемент Богнера-Фокса-Шмидта	166
6.3.2.	Элемент Клафа	168
6.3.3.	Полусовместный элемент	168
6.4.	Несовместный треугольный элемент с 9-ю степенями свободы	169
6.5.	Совместные треугольные элементы	172
6.5.1.	Трехузловой элемент Клафа-Точера с 9-ю степенями свободы (<i>PLSA3</i>)	172
6.5.2.	Элемент Клафа-Точера с 12-ю степенями свободы	175
6.5.3.	Еще один метод построения системы аппроксимирующих функций Клафа-Точера	176
6.5.4.	Шестиузловой треугольный элемент с 18-ю степенями свободы (<i>PLSA6</i>)	176
6.5.5.	Трехузловой элемент Купера с 18-ю степенями свободы	180
6.6.	Совместные четырехугольные элементы (<i>SA</i>)	182
6.6.1.	Элемент с 12-ю степенями свободы (<i>PLSA4</i>)	182
6.6.2.	Элемент с 16-ю степенями свободы	186
6.6.3.	Элемент с 24-мя степенями свободы (<i>PLSA8</i>)	186
6.7.	Тесты	192
6.7.1.	Патологические (patch) тесты	192
6.7.2.	Прямоугольная свободно опертая по периметру пластина под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки	194
6.7.3.	Напряженно-деформированное состояние защемленной шестиугольной пластины под равномерно распределенной нагрузкой	196
Глава 7.	Изгиб плит средней толщины (теория Рейсснера-Миндлина)	198
7.1.	Теория изгиба плит средней толщины	198
7.2.	Степени свободы и аппроксимации	202
7.3.	Треугольники <i>DSG3</i>	204
7.3.1.	Элемент <i>DSG3</i>	204
7.3.2.	Элемент <i>DSG3M</i>	206
7.4.	Изопараметрический четырехугольник с узлами в вершинах (<i>MITC4</i>)	207
7.5.	Совместная интерполяция перемещений и углов поворота (<i>Joint interpolation of displacements and rotations, JIDR</i>)	209
7.5.1.	Критерии полноты и несовместности для элементов теории Рейсснера-Миндлина	209
7.5.2.	Системы аппроксимирующих функций	212
7.6.	Треугольные элементы метода <i>JIDR</i>	215
7.6.1.	Треугольник с узлами в вершинах (<i>JIDR3</i>)	215

7.6.2.	Шестиузловой треугольник (<i>JIDR6</i>).....	217
7.6.3.	Изопараметрический шестиузловой треугольник (<i>JIDR6IP</i>).....	217
7.7.	Прямоугольные элементы <i>JIDR</i>	217
7.7.1.	Четырехузловой элемент (<i>JIDR4RIC</i>).....	217
7.7.2.	Восьмиузловой прямоугольный элемент (<i>JIDR8RIC</i>).....	219
7.8.	Четырехугольные элементы <i>JIDR</i>	219
7.8.1.	Изопараметрический четырехузловой элемент (<i>JIDR4I</i>).....	219
7.8.2.	Изопараметрический восьмиузловой элемент (<i>JIDR8I</i>).....	220
7.8.3.	Четырехузловой элемент (<i>JIDRSA</i>).....	220
7.8.4.	Восьмиузловой элемент (<i>JIDR8SA</i>).....	220
7.9.	Тесты.....	220
7.9.1.	Патологические (patch) тесты.....	221
7.9.2.	Прямоугольная свободно опертая по периметру пластина под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки.....	221
7.9.3.	Напряженно-деформированное состояние защемленной шестиугольной пластины под равномерно распределенной нагрузкой.....	223
Глава 8.	Осесимметричная задача теории упругости.....	224
8.1.	Тела вращения.....	224
8.2.	Степени свободы и аппроксимации.....	226
8.3.	Элементы с квазивращательными степенями свободы.....	227
8.3.1.	Трехузловой элемент (<i>QRDF3A</i>).....	227
8.3.2.	Четырехузловой изопараметрический элемент (<i>QRDF3AIP</i>).....	228
8.3.3.	Четырехузловой элемент с кусочно-полиномиальной аппроксимацией (<i>QRDF4ASA</i>).....	230
8.4.	Элементы с вращательными степенями свободы (<i>DDF</i>).....	231
8.4.1.	Треугольник с узлами в вершинах (<i>DDF3A</i>).....	231
8.4.2.	Шестиузловой треугольник (<i>DDF6ASA</i>).....	231
8.4.3.	Четырехугольник с узлами в вершинах (<i>DDF4ASA</i>).....	232
8.4.4.	Восьмиузловой четырехугольник (<i>DDF8ASA</i>).....	233
8.5.	Тесты.....	234
8.5.1.	Патологические (patch) тесты.....	234
8.5.2.	Задача Ляме о замкнутой сферической оболочке, нагруженной изнутри и извне равномерно распределенными давлениями.....	235
8.5.3.	Задача Бусинеска о действии на упругое полупространство нормальной силы.....	237
8.5.4.	Толстая круглая в плане плита, жестко защемленная по боковой поверхности, под действием равномерно распределенной по верхнему основанию нагрузки.....	239
Глава 9.	Оболочки.....	242
9.1.	Типы оболочек.....	242
9.2.	Степени свободы и аппроксимации.....	243
9.3.	Тесты.....	244
9.3.1.	Патологические (patch) тесты.....	247
9.3.2.	Цилиндрический резервуар под действием внутреннего давления жидкости.....	247
9.3.3.	Пространственная Z-образная пластинчатая конструкция.....	249
Приложение.	Численное интегрирование.....	253
П.1.	Квадратурные и кубатурные формулы.....	253
П.2.	Квадратурные формулы.....	253

П.3. Кубатурные формулы на плоскости.....	254
П.3.1. Прямоугольник.....	254
П.3.2. Треугольник.....	256
П.4. Кубатурные формулы в трехмерном пространстве.....	259
П.4.1. Параллелепипед.....	259
П.4.2. Тетраэдр.....	260
П.4.3. Треугольная призма.....	262
Литература.....	264
Оглавление.....	271