

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ**

**Кафедра будівельної механіки**

„Допустити до захисту в ДЕК”  
Завідуючий кафедрою: професор **Баженів В.А.** „\_\_\_\_\_”

**АТЕСТАЦІЙНА МАГІСТЕРСЬКА РОБОТА**  
**на тему:**

**„Визначення динамічних характеристик промислової димової труби на основі напіваналітичного методу скінченних елементів”**

Виконав:  
студент **Лозовий О.П.**

Група 54  
факультет будівельний  
спеціальності 7.092101  
„Промислове та цивільне  
будівництво”

Науковий керівник \_\_\_\_\_ д.т.н., проф. **Гуляр О.І.**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
 КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
 БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

"ЗАТВЕРДЖУЮ"  
 декан будівельного факультету  
 к. т. н. , доцент Іванченко Г.М.  
 "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 2011р.

Індивідуальний план навчання Лозового Олександра Петровича  
 (прізвище, ім'я, по батькові)

1. Зарахований наказом ректора КНУБА № 1824/2 від 11.01.2011 р.  
 на спеціальність 7.092101 "Промислове та цивільне будівництво"  
 (шифр та назва)

Термін навчання з 01.09.2010 по 30.06.2011.

2. Науковий керівник д. т. н. професор Гуляр О.І.  
 (вчений ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

3. Тема наукового дослідження: Визначення динамічних характеристик  
 промислової димової труби на основі напіваналітичного методу  
 скінченних елементів

4. План навчальної роботи

№ п/п	Назва дисципліни і види робіт	Форма звітності	Примітка
1	Будівельна механіка	Атестаційна робота	

Науковий керівник і тема наукового дослідження затверджена рішенням  
 Ради факультету, наказ № 582 від 13.05.2011 р.

Примітки:

1. \_\_\_\_\_.

2. \_\_\_\_\_.

Науковий керівник \_\_\_\_\_  
 (підпис, дата)

Магістрант \_\_\_\_\_  
 (підпис, дата)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

„ЗАТВЕРДЖУЮ”

Декан будівельного факультету

к.т.н., доцент Іванченко Г.М.

“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2011

Завдання на виконання атестаційної магістерської роботи

Тема АМР: Визначення динамічних характеристик промислової димової труби на основі напіваналітичного методу скінченних елементів

затверджена наказом ректора № 582 від 13.05.2011 р.

Зміст роботи

1. Вихідні данні до роботи
2. Зміст пояснювальної записки: Вступ. Побудова розрахункових співвідношень НМСЕ. Алгоритм і програмна реалізація рішення задач динаміки однорідних і неоднорідних тіл обертання. Розв’язання тестових задач. Обґрунтування достовірності і порівняння збіжності рішень. Висновок
3. Перелік графічного матеріалу: Геометрія димової труби. Застосування напіваналітичного методу скінченних елементів. Результати тестових задач. Порівняльна оцінка отриманих результатів розрахунку. Результати розрахунку димової труби.
4. Календарний план виконання роботи:

№ п/п	Види робіт та їх зміст	Дата виконання
1	Ознайомлення з літературою	1.09.10-1.03.11
2	Огляд літератури за темою. Вступ	1.03.11-14.03.11
3	Освоєння теорії розрахунків напіваналітичним методом скінченних елементів.	14.03.11-28.03.11
4	Алгоритм визначення динамічних характеристик для однорідних і неоднорідних тіл обертання.	28.03.11-04.04.11
5	Дослідження власних форм і частот на основі тестових прикладів.	04.04.11-18.04.11
6	Формування СЕМ димової труби. Модальний аналіз промислової димової труби.	18.04.11-16.05.11
7	Аналіз результатів	16.05.11-30.05.11
8	Графічна частина .Оформлення роботи	30.05.11-06.06.11

5. Термін подання закінченої роботи 6 червня 2011р.

6. Дата видачі завдання 1 вересня 2010р.

Керівник д.т.н., проф. Гуляр О.І. \_\_\_\_\_  
(підпис)

Магістрант Лозовий О.П. \_\_\_\_\_  
(підпис)

## ЗМІСТ

Вступ .....	5
<b>1. Розрахункові співвідношення НМСЕ для розв’язання просторової задачі динаміки .....</b>	
<b>1.1. Постановка просторової задачі динаміки для тіл обертання. . . .</b>	19
<b>1.2. Кільцевий скінчений елемент. ....</b>	26
<b>1.3. Розрахункові співвідношення НМСЕ для визначення динамічних характеристик однорідних і неоднорідних тіл обертання. . .</b>	32
<b>2. Алгоритм визначення динамічних характеристик для однорідних і неоднорідних тіл обертання. ....</b>	43
<b>3. Обґрунтування достовірності і порівняння збіжності рішень МСЕ і НМСЕ для неоднорідних в круговому напрямку тіл обертання. ....</b>	53
<b>3.1. Вільні коливання циліндричної оболонки. ....</b>	53
<b>3.2. Вільні коливання кругової пластини. ....</b>	64
<b>3.3. Вільні коливання циліндричної оболонки з вирізом. ....</b>	75
<b>4. Визначення динамічних характеристик промислової димової труби. . .</b>	89
Висновки. ....	100
Список використаних джерел .....	101

## Вступ

**Актуальність теми.** Швидкий розвиток техніки, постійне зростання виробництва ведуть до збільшення розмірів димових та вентиляційних труб. Не так давно труби висотою 100-150 метрів вважалися високими конструкціями, а в наш час побудовані труби висотою більше ніж 420 м, досліджуються питання побудови труб висотою до 600 м (рис. 1). Труби висотою до 200 м, як правило, проектувалися як консольні системи; в більш високих трубах чітко проявляється просторовий характер їх роботи, що в значній мірі, пов'язано з зменшенням відношення товщини стінки до радіусу серединної поверхні -  $\delta/R$ .

При швидкому збільшенні висоти труб і їх діаметра товщина їх стінок зростає повільніше. Для труб висотою до 50 метрів відношення товщини стінки до радіусу її серединної поверхні біля основи  $\delta/R$  складає  $1/5-1/7$ , для труб висотою 300 м воно попадає до  $1/12-1/15$ , в проектах труб висотою 400-420 м  $\delta/R=1/20-1/25$ . При зменшенні співвідношення  $\delta/R$  вагомо змінюється розподіл зусиль – труби починають працювати як складні просторові системи; в них зростають кільцеві моменти та нормальні сили, змінюється розподіл нормальних меридіальних сил і моментів, а також зсувних та поперечних сил.

Швидка зміна розмірів труб привела до якісної зміни в розподілі сил у таких спорудах. Димові труби висотою 250-400 і більше метрів відносяться до цікавих і достатньо складних інженерних споруд. Існує велика кількість різноманітних конструктивних рішень. Такі труби виконуються з одним чи з декількома газовідводящими стволами чи не мають їх. Внутрішню поверхню в ряді випадків мають шар футеровки, влаштовуються золовловлювачі і т.і. Інколи, для обслуговування внутрішньої зони, в спорудах розміщуються ліфти.

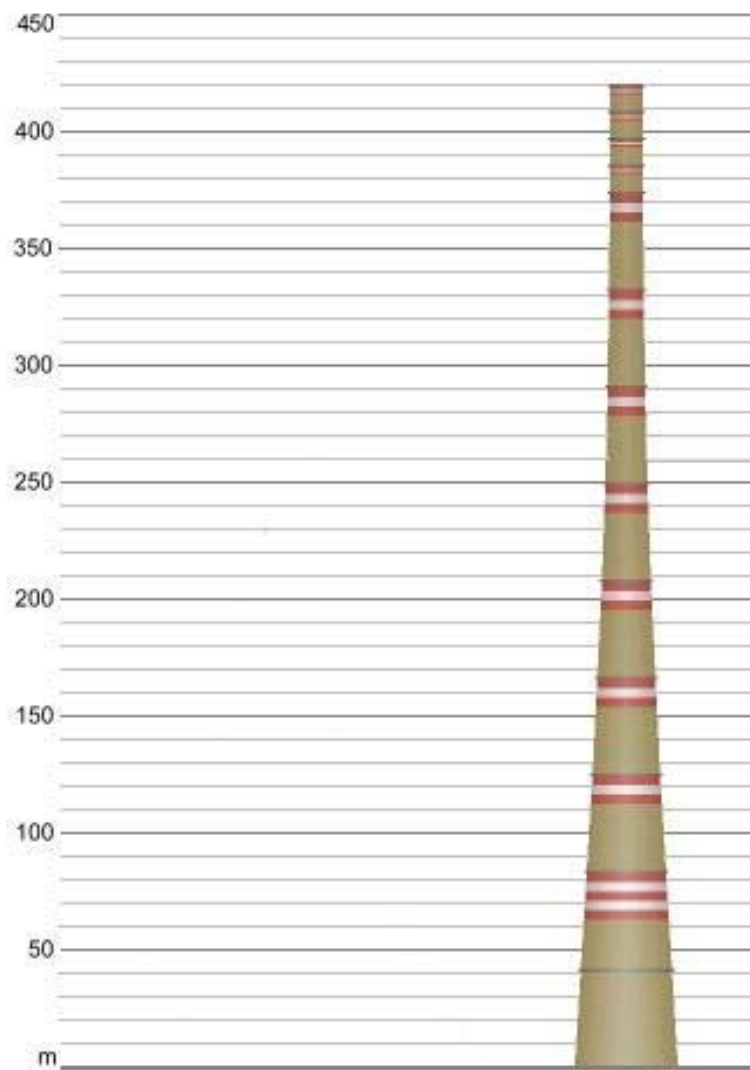


Рис. 1. Димова труба висотою 420 м.

Труби таких розмірів працюють при складному комплексі навантажень і впливів, що враховують сполучення статичних і динамічних розподілених і локальних навантажень, непостійних температурних і атмосферних впливів, вплив сонячного нагрівання і хімічно-агресивних сполучень.

Питання просторового розрахунку труб є достатньо складними, що обумовлено складним характером вітрового впливу, складністю конструктивних рішень споруд, утворенням в них неоднорідної системи тріщин і т.і. Просторова робота таких споруд теоретично і експериментально вивчена мало, при їх проектуванні використовуються наближені інженерні

методи розрахунку. В зв'язку з цим великого значення набувають експериментальні дослідження дійсної роботи конструкцій і теоретичне дослідження, направлені на уточнення методів їх розрахунку [1].

**Мета і завдання дослідження.** Мета магістерської роботи полягає у дослідженні динамічних характеристик промислової димової труби на основі напіваналітичного методу скінченних елементів. Завданням дослідження є перевірка достовірності результатів розв'язків отриманих за допомогою напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ) з розв'язками отриманими за допомогою програмного комплексу „SCAD”.

**Об'єктом дослідження** є форми і частоти власних коливань однорідних і неоднорідних тіл обертання.

**Предметом дослідження** є чисельна методика та результати розв'язування просторових задач динаміки.

**Методи дослідження.** В наш час найбільш універсальним чисельним методом, що застосовується в наукових дослідженнях, особливо для розрахунку складних об'єктів, є метод скінченних елементів (МСЕ). Багато сучасних комплексів прикладних програм („Ліра”, „SCAD” та інші) спираються на метод скінченних елементів (МСЕ) та орієнтовані на дослідження власних форм і частот конструкції як на основу розрахунку на міцність.

Застосування традиційного варіанта методу скінченних елементів для розв'язання просторових задач динаміки проблематично, у зв'язку із значними обчислювальними труднощами. Істотно поширити можливості МСЕ, в особливості для класу об'єктів, що розглядаються в даній роботі, дозволяє напіваналітичний метод скінченних елементів (НМСЕ), який набув широкого застосування для задач статички, динаміки, механіки руйнування. Використання моментної схеми скінченного елемента (МССЕ) до розкладу напружень та деформацій надає можливість суттєво збільшити ефективність

чисельного дослідження масивних та тонкостінних просторових конструкцій на основі МСЕ. Крім того, МССЕ забезпечує відсутність деформацій при переміщенні тіла як жорсткого цілого, а також знімає проблему «хибного зсуву», що виникає при розрахунках тонкостінних конструкцій за допомогою просторових СЕ.

### Основні конструктивні елементи димової труби.

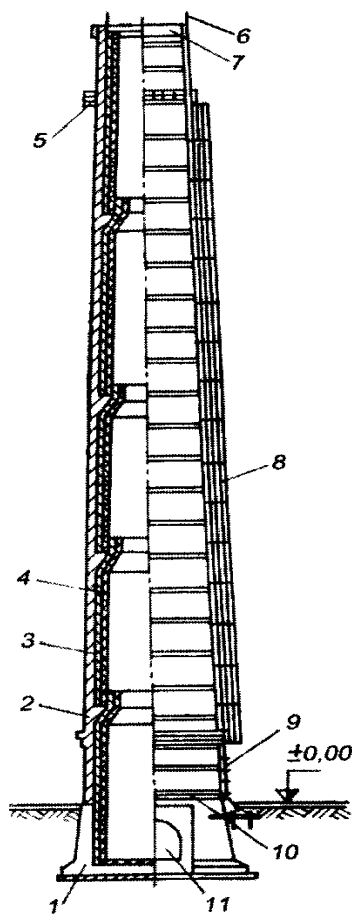


Рис. 2. Димова труба і її конструктивні елементи

1 – цоколь; 2 – ствол; 3 – ізоляція; 4 – футеровка; 5 – світлофорна площадка; 6 – громовідвід; 7 – головка; 8 – сходи із огородженням; 9 – кабель для захисту від блискавки; 10 – стяжні кільця; 11 – ввід борова у фундамент.



**Фундаменти.** На споруду, що будується на поверхні землі, діють її власна вага, тиск вітру, сейсмічний вплив, коливання і т.д. Всі ці навантаження передаються на ґрунт.

Вибір конструкції фундаменту виконується на основі інженерно-геологічних та гідрогеологічних вишукувань на майбутньому майданчику будівництва димової труби.

Найбільшого поширення отримали конструкції залізобетонних фундаментів під димові труби, які складаються із стакана у вигляді обрізаного конуса та круглої на плані плити (рис. 3), найбільш вигідної у співвідношенні розподілу навантаження на основу. Пливу фундаменту армують, як правило, зварними сітками і каркасами.

Для спостереження за просіданням і креном фундаменту влаштовують не менше чотирьох реперів. Центр труби фіксують циліндричним сталевим репером, що влаштовується у фундаментній плиті.

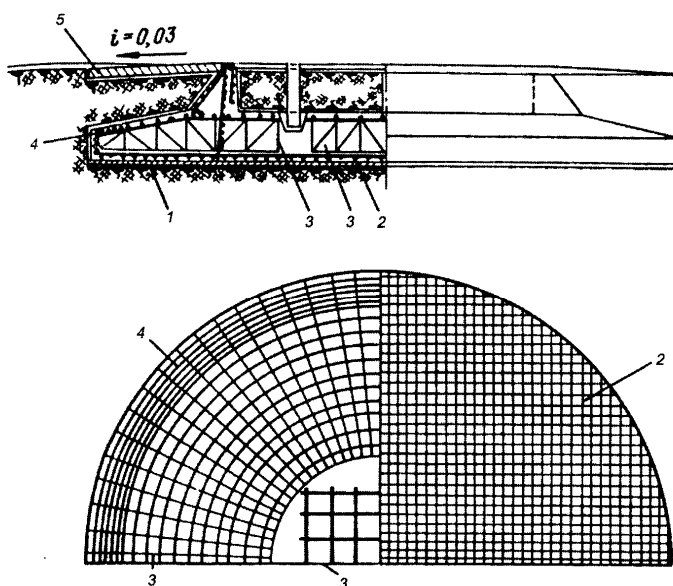


Рис. 3. Фундамент димової труби

1 – бетонна підготовка; 2 – нижні арматурні сітки плити; 3 – плоскі арматурні каркаси; 4 – верхня кільцева арматура плити; 5 – відмостка.

**Цоколь труби** – нижня потовщена частина її ствола, в якій влаштовують отвори для наземних і підземних введів газоходів, а також робочі прорізи. В цегляних і збірних залізобетонних трубах цоколь звичайно циліндричний, у монолітних залізобетонних і металічних великої висоти – з нахилом, що значно перевищує нахил наступної частини ствола труби. Висоту цоколя встановлюють з урахуванням архітектурних рішень і відмітки газоходів, що підходять та приймають приблизно рівною  $1/10$  від загальної висоти труби.

У цегляних трубах вводи газоходів перекривають напівциркульними арками товщиною не менше двох обкатів і при значній ширині отворів (25-30 % окружності цоколя) влаштовують пілястри. Верхня частина цегляних та збірних залізобетонних труб закінчується ступінчатим карнизом чи художньою кладкою.

**Стволи димових труб** можуть виконуватися цегляними, армоцегляними, залізобетонними чи металевими.

Ствол цегляної димової труби – зрізаний конус з нахилом зовнішньої твірної в межах 1,5-3 % , що залежить, в основному, від району вітрового навантаження та відношення висоти до нижнього зовнішнього діаметра не більше 20. По висоті ствол цегляної труби має змінну товщину і складається із поясів з різною товщиною стінок. Звичайна висота поясу 12-15 м, але не більше 24 м. Мінімальний діаметр вихідного отвору для труб висотою до 45 м повинен прийматися не менше 1,2 м, а для труб більшої висоти – не менше 2,5 м.

Стволи залізобетонних монолітних димових труб також представляють собою зрізаний конус, але зі змінним нахилом, що зменшується по висоті від 8 до 1,5 % . Досить часто верхню частину ствола виконують циліндричною. По висоті ствол залізобетонної монолітної труби має перемінну товщину. Ствол труби розбивається по висоті на пояси 15-20 м з постійною товщиною стіни.

**Головки (оголовки)** всіх видів димових труб працюють в найбільш неприємних умовах експлуатації. Тому конструктивній міцності головки приділяють велику увагу, виконуючи її з потовщенням. Зверху головку димової труби захищають ковпаком із легованого чавуну чи кислотостійкої кераміки. Ковпак складається із окремих складових (рис. 4).

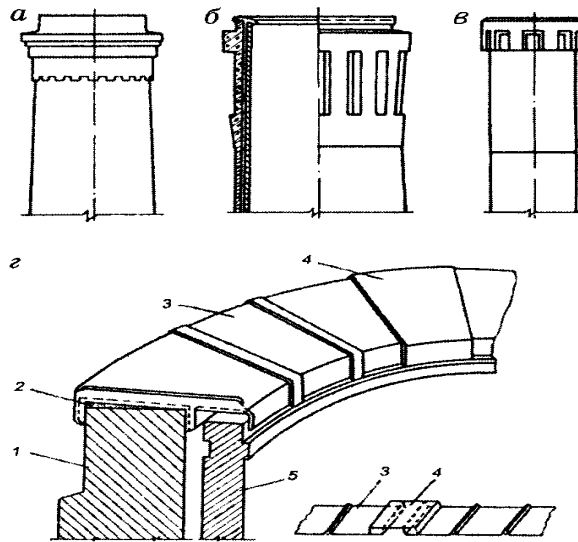


Рис. 4. Головки димових труб і захисний ковпак

а – цегляної; б – монолітної залізобетонної; в – збірної залізобетонної; г – захисний ковпак; 1 – головка труби; 2 – підливка із цементного розчину; 3 – основна складова частина ковпака; 4 – кінцева складова ковпака; 5 – цегляна футеровка.

**Сходи.** Для підйому персоналу на світлофорні площадки димової труби, для догляду за поверхнею димової труби, для різноманітних ремонтних робіт в процесі експлуатації димової труби слугують сходи.

Сходи цегляних димових труб виконують із скоб і огороження. Сходи монолітних залізобетонних, збірних залізобетонних і металевих димових труб влаштовують із окремих частин, що з'єднуються поміж собою накладками (рис. 5).

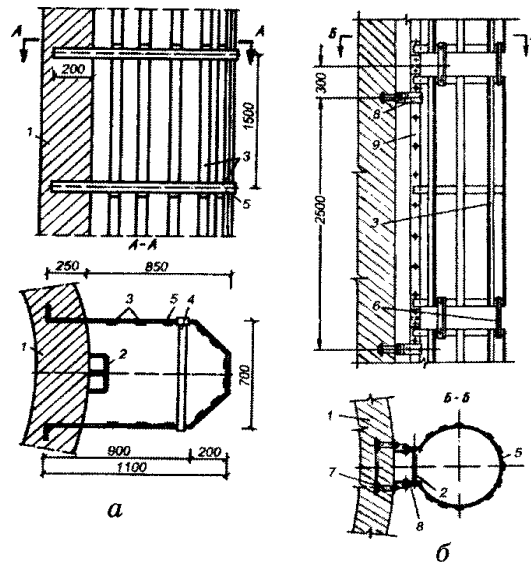


Рис. 5. Сходи димової труби

а – цегляної; б – залізобетонної; 1 – ствол труби; 2 – сходові скоби; 3 – планки огороження; 4 – скоба для відпочинку; 5 – скоба огороження; 6 – планка; 7 – дюбелі; 8 – тримачі; 9 – тятиву.

**Світлофорні площадки.** В нічний час димові труби повинні бути позначені сигнальними ліхтарями, що видно з усіх сторін. Для розміщення сигнальних ліхтарів світло огороження на димових трубах влаштовують світлофорні площадки. Світлофорна площадка цегляної труби складається з: консольних балок, решітчастого настилу та огороження. Світлофорні площадки монолітних залізобетонних труб складаються з: несучих кронштейнів, що кріпляться до дюбелів забетонованих в стіну, решітчастого настилу та огороження. Для кращої видимості із літаків промислові димові труби висотою 100 м і більше фарбують з відмітки +75 м в контрастні кольори, смугами темного кольору шириною 5 м і світлого – шириною 10 м.

**Громовідводи** – це комплекс заходів, що призначений для забезпечення безпеки людей, збереження споруди і обладнання від можливого руйнування і займання, що виникають при впливі блискавки. Димові труби відносяться до III категорії споруд блискавко захисту [11].

### Навантаження, що діють на труби великих розмірів.

При розрахунку труб з урахуванням їх просторової роботи враховують наступні навантаження і впливи: власна вага; вітер; температура; інші особливі випадки навантажень і впливів (інсоляція, нерівномірне осідання, додаткове навантаження від спеціального обладнання, землетруси).

**Власна вага.** При визначенні власної ваги приймають до уваги залізобетон несучого ствола; конструкції труб-газоходів, якщо їхня вага передається на несучий ствол; теплоізоляційний шар; футеровка. Крім того, враховується додаткове обладнання – сходи, ліфти, грозозахист, резервуари для води і т.і.

**Вітер.** Вітрове навантаження на будівлі і споруди визначається як сума статичної і динамічної складової. Тиск вітру, що діє на споруду на рівні  $z$ , записується у вигляді:

$$q(z, t) = q_H^C(z) + q'(z, t);$$

$$q_H^C(z) = \frac{\rho \cdot V_H^C(z) \cdot C_x(z)}{2}; \quad q'(z, t) = 2 \cdot q_H^C(z) \cdot \frac{V'(z, t)}{V_H(z)},$$

де  $q_H^C(z)$  - нормативне значення статичної складової тиску вітру;  $V_H(z)$  - нормативна швидкість на рівні  $z$ ;  $q'(z, t)$  - тиск вітру, що відповідає пульсаційній частоті швидкості  $V'(z, t)$ ;  $\rho$  - густина повітря;  $C_x(z)$  - коефіцієнт лобового опору споруди на рівні  $z$ .

Статична складова, що відповідає встановленому швидкісному натиску, враховується у всіх випадках. Динамічна складова, що викликана пульсаціями швидкісного натиску, враховується при розрахунку споруд з періодом власних коливань більше 0,25 сек. Для димових труб необхідно виконувати перевірочний розрахунок на резонанс, що виникає при такій швидкості вітру, коли частота зриву вихрів співпадає з власною частотою коливань труби поперек потоку.

При розрахунку високих споруд, чутливих до динамічного впливу вітру, необхідно знати розподіл енергії турбулентного потоку по частотам. Цей розподіл називають енергетичним спектром (спектральною щільністю) пульсації компонент швидкості вітру.

При визначенні статичної складової вітрового навантаження на споруду основною характеристикою вітрового режиму місцевості є нормативний швидкісний тиск вітру. Для визначення швидкості вітру заданої безпечності використовується метод екстраполяції. Нормативне значення статичної складової вітрового навантаження  $q_H^C(z)$  визначається за формулами:

$$q_H^C(z) = q_{0t}(z) \cdot C; \quad q_{0t}^{(z)}(z) = q_0 \cdot k_t(z); \quad q_0 = \frac{\rho \cdot v_0^2}{2};$$

де  $q_0$  - нормативний швидкісний тиск вітру на висоті 10 м над поверхнею землі;  $\rho$  - густина повітря;  $v$  - швидкість вітру на висоті 10 м над поверхнею землі;  $k_t(z)$  - коефіцієнт, що враховує зміну швидкісного тиску по висоті;  $C$  – аеродинамічний коефіцієнт.

Щоб виконати динамічний розрахунок труб з урахуванням динамічного впливу вітру необхідно визначити амплітуду і період коливання ствола. Складність розрахунку полягає в тому, що період коливання труби залежить не тільки від навантаження і геометричних параметрів споруди, але й від жорсткості залізобетонних перерізів, що залежить від утворення в конструкції системи тріщин. При розрахунку труби на вітрове навантаження зусилля в її перерізах і переміщення визначаються методом послідовних наближень. В якості першого наближення приймаються згинаючі моменти в перерізах труби, що обчислені без врахування нормальних сил.

В якості першого наближення для пружної лінії труби може бути прийнята парабола у вигляді:  $Y = \frac{y_B \cdot z^2}{H^2}$ , де  $y_B$  - прогин верху труби.

За сумарними згинаючими моментами  $i$ -го наближення обчислюють жорсткості перерізів труби і її прогини. Приймаючи лінію прогинів від розрахункового вітрового навантаження в якості першого наближення, методом послідовних наближень визначаються основний період і перша форма власних коливань труби. За друге наближення приймають вигнуту вісь споруди, завантажену силами інерції, що виникають при коливаннях по першій формі. Прирівнюючи ординати кривих першого та другого наближень для верхньої точки споруди, отримують перше приблизне значення частоти власних коливань і т.д.

Нормативне значення динамічної складової вітрового навантаження визначається для кожної форми коливань споруди у вигляді системи інерційних сил, приложених до середини ділянок, на які умовно розбивається споруда. Інерційна сила, прикладена в середині ділянки з номером  $j$  при коливаннях споруди по  $i$ -й власній формі повинне визначатися по формулі:

$$Q_{ij}^D = M_j \cdot \xi_i \cdot \eta_{ij} \cdot v,$$

де  $M_j$  - маса  $j$ -ї ділянки, зосереджена в його середині;  $\xi$  - коефіцієнт динамічності;  $v$  - коефіцієнт, що враховує просторову кореляцію пульсації швидкості вітру по висоті споруди;  $\eta_{ij}$  - приведені прискорення середини  $j$ -ї ділянки. Коефіцієнт динамічності  $\xi$  залежить від параметру  $\varepsilon_i = \frac{T \cdot v}{1200}$  і від логарифмічного декременту  $\delta$ . ( $T$  - період  $i$ -ої форми власних коливань,  $v = 1,28 \cdot (n_n \cdot q_0)^{1/2}$  - розрахункова швидкість вітру).

Коефіцієнт просторової кореляції  $v$  враховується тільки для першої форми власних коливань і визначається за таблицями. Для інших форм коливань  $v=1$ .

Зусилля та переміщення в димових трубах при дії вітрового навантаження повинні визначатися окремо від статичної складової і від

динамічних складових, що відповідають кожній і-ій формі коливань. Сумарні зусилля і переміщення визначаються за формулою:

$$X = X^C + \left[ \sum_{i=1}^S (X_i^A)^2 \right]^{1/2},$$

де  $X$  – згинаючий (крутний) момент, поперечна чи повздовжня сила;  $X^C$  – теж від статичної складової вітрового навантаження;  $X_i^A$  – від динамічної складової вітрового навантаження при коливаннях по і-ій формі;  $S$  – число форм коливань, що враховуються в розрахунку.

Перевірка на резонанс споруд кругової циліндричної форми повинна виконуватися в тих випадках, коли швидкість вітру  $V_{\text{ЕД}i}$  знаходиться в межах  $0,64 \cdot q_0^{1/2} \leq V_{\text{КР}i} \leq 25 \text{ м/с}$ . Критичну швидкість вітру, що викликає резонансні коливання споруд в напрямку, перпендикулярному вітровому потоку, дозволяється визначати за формулою:

$$V_{\text{КР}i} = \frac{d}{T_i \cdot Sh},$$

де  $T$  – період власних коливань споруди по і-ій формі;  $Sh$  - число Струхаля поперечного перерізу ( для кола 0,2);  $d$  - діаметр споруди.

При перевірці на резонанс амплітуду інтенсивності динамічної сили  $F_i(z)$  на рівні  $z$  при коливаннях споруди по і-ій формі дозволяється визначати за формулою:

$$F_i(z) = F_{0i} \cdot \alpha_i(z),$$

де  $\alpha_i$  - відносна координата і-ої форми власних коливань;  $F_{0i} = 0,25 \cdot q_{\text{КР}i} \cdot d$  - амплітуда інтенсивності на рівні вільного кінця споруди консольного типу;  $q_{\text{КР}i} = 0,613 \cdot V_{\text{КР}i}^2$  - швидкісний тиск; 0,25 – коефіцієнт поперечної сили для споруд кругової циліндричної форми. Для споруд консольного типу дозволяється враховувати тільки першу форму власних коливань.



Резонансні зусилля і переміщення споруди в перерізах з координатою  $z$  дозволяється визначати за формулою:  $X^{PE3}(z) = \frac{\pi \cdot X^C \cdot z}{0,3}$ .

Для перерізів конічної залізобетонної димової труби розташованих нижче  $2/3$  її висоти, розрахунковими будуть зусилля, що виникають в напрямку дії вітру. Для верхньої частини труби розрахунковими можуть стати зусилля, що виникають при вихровому збудженні, що відповідає другій формі власних коливань.

При розрахунку труби з урахуванням її просторової роботи розподіл вітрового тиску по кільцевому перерізу, що відповідає аеродинамічному коефіцієнту СНиП на навантаження, з певною неточністю замінюються рядом складових впливів:

$$Q = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_i = y_0 \cdot q + y_1 \cdot q \cdot \cos \varphi + y_2 \cdot q \cdot \cos 2\varphi + \dots + y_i \cdot q \cdot \cos(i\varphi).$$

На рис. 6 кривими 3-5 показані епюри аеродинамічного коефіцієнта відповідно при розкладі його на 3-5 членів ( $i=2,3,4$ ). При збільшенні кількості членів розкладу навантаження в ряд, епюри розподілу аеродинамічного коефіцієнта зближуються. Але слід відмітити, що консольний згин труби визначається тільки першим членом розкладу коефіцієнта, що характеризує розподіл тиску по периметру її кільцевого перерізу по  $\cos \varphi$ , інші члени розкладу само урівноважені в проекції на будь яку горизонтальну вісь.

При збільшенні кількості членів ряду розкладу вітрового навантаження збільшується точність розрахунку труб, але при цьому збільшується і трудомісткість розрахункової роботи [1].

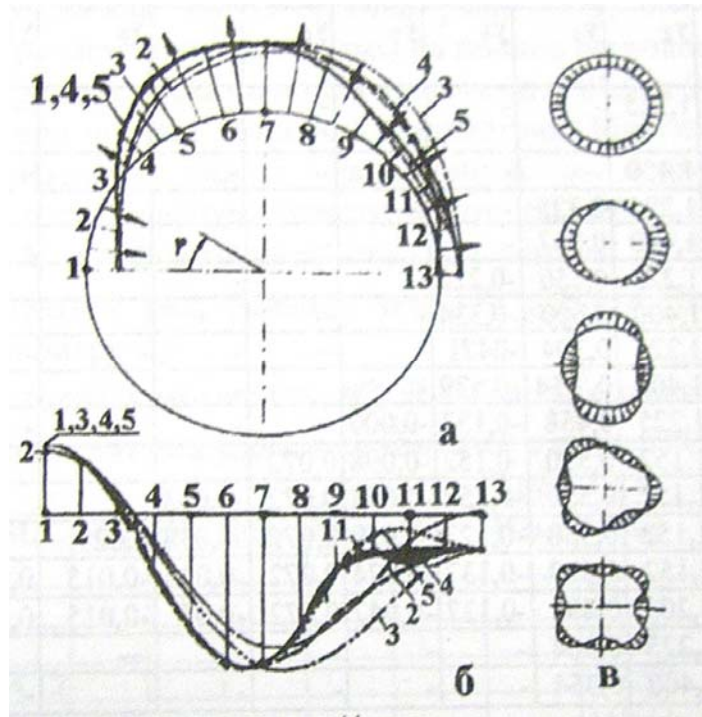


Рис. 6. Розклад в ряд аеродинамічного коефіцієнта вітрового тиску

а,б – по кільцевому периметру труби, при розгортці епюр в площину; в – члени розкладу; 1 – епюра коефіцієнта за СНиП; 2 – у відповідності з розрахунками; 3,4,5 – при розкладі коефіцієнта на 3,4 і 5 членів ряду; 11 – при розкладі на 11 членів ряду.

# 1. Розрахункові співвідношення НМСЕ для розв'язання просторової задачі динаміки

## 1.1. Постановка просторової задачі динаміки для тіл обертання

Розглядається неоднорідне ізотропне тіло обертання, об'ємом  $V$ . Описання геометрії тіла зручно проводити в ортогональній круговій циліндричній системі координат  $Z^{i'}$ , котра в подальшому називається базисною. В ортогональній циліндричній системі координат відмінні від нуля наступні компоненти метричного тензора, котрі визначають масштаби базисних векторів

$$g_{11'} = g_{2'2'} = 1, \quad g_{3'3'} = (Z^{2'})^2. \quad (1.1)$$

Описання напружено-деформованого стану тіла із складною формою меридіонального перерізу спрощується в місцевій криволінійній системі координат  $x^j$ , звичайно зв'язаною з геометрією тіла.

Приймається, що влюбій точці тіла зв'язок між базисною і місцевою системами координат здійснюється за допомогою тензора перетворення координат

$$Z_j^{i\circ} = \frac{\partial Z^{i\circ}}{\partial x^j}. \quad (1.2)$$

Індекси, котрі приймають значення 1,2,3 тут і в подальшому позначенні латинськими буквами, індекси котрі приймають 1,2 – грецькими.

В силу ортогональності  $X^3$  до площини меридіонального перерізу

$$Z_{,1}^{3'} = Z_{,2}^{3'} = Z_{,3}^{1'} = Z_{,3}^{2'} = 0, \quad Z_{,3}^{3'} = 1. \quad (1.3)$$

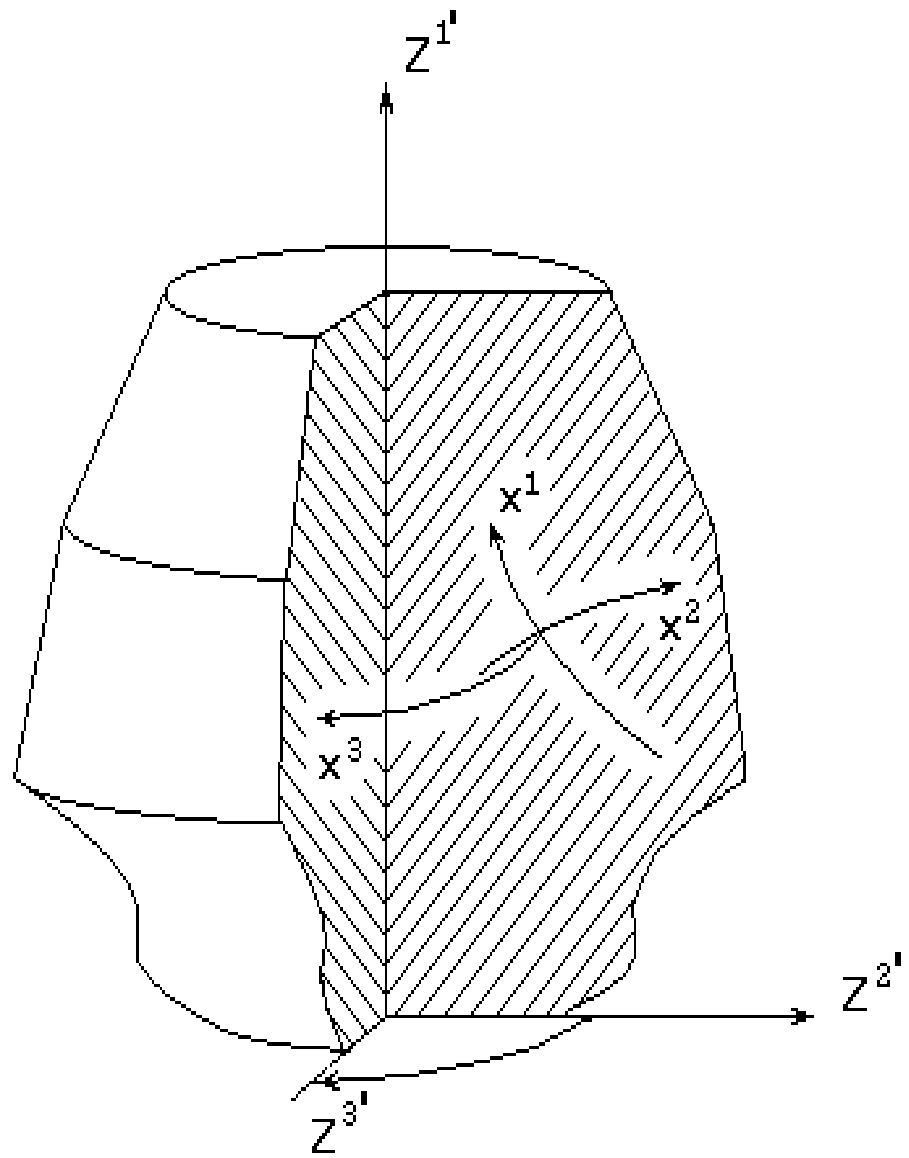


Рисунок 1.1. Базисна і місцева системи координат.

Коваріантні компоненти метричного тензора місцевої системи координат представимо через коваріантні компоненти метричного тензора базисної системи координат.

$$g_{ij} = Z_i^{k\odot} Z_j^{l\odot} g_{k\odot l\odot} \quad (1.4)$$

Коваріантні компоненти метричного тензора місцевої системи координат виразимо по відомим коваріантним, використовуючи наступне співвідношення

$$g^{ij} = \frac{A(g_{ij})}{g}, \quad (1.5)$$

де  $A(g_{ij})$  – алгебраїчне доповнення до елементу матриці, складеної з коваріантних компонент метричного тензора;

$$g = \det(g_{ij}) \text{ – її визначник.}$$

Переміщення точки тіла  $u_i$ , визначаються компонентами в базисній системі координат. Компоненти тензора деформацій  $\varepsilon_{ij}$  в місцевій системі координат виражаються через компоненти переміщень в базисній [2]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( u_{k',i} Z_j^{k'} + u_{k',j} Z_i^{k'} - 2u_{k',i} Z_j^{l'} Z_j^{m'} \Gamma_{l'm'}^{k'} \right), \quad (1.6)$$

де  $\Gamma_{l'm'}^{k'}$  - символи Крістофеля другого роду в базисній системі координат. В циліндричній системі координат нульовими являються наступні компоненти

$$\Gamma_{l'm'}^{k'} = -Z^{2'}, \quad \Gamma_{l'm'}^{k'} = \Gamma_{l'm'}^{k'} = \frac{1}{Z^{2'}}. \quad (1.7)$$

Тоді співвідношення (2.12) приймають наступний вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left( u_{\gamma',\beta} Z^{\gamma'}_{,\alpha} + u_{\gamma',\alpha} Z^{\gamma'}_{,\beta} \right), \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} \left( u_{3',\beta} + u_{\gamma',3} Z^{\gamma'}_{,\alpha} - 2 \frac{u_{3',Z^{2'}}_{,\alpha}}{Z^{2'}} \right), \\ \varepsilon_{33} &= u_{3',3} + Z^{2'} u_{2'}.\end{aligned}\tag{1.8}$$

Компоненти тензора напружень в місцевій системі координат виражаються через компоненти тензора деформацій на основі узагальненого закону Гука [2]

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}.\tag{1.9}$$

В ізотропному тілі компоненти тензора пружних постійних пов'язані коефіцієнтами Ляме  $\lambda$ ,  $\mu$  співвідношеннями

$$C^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{jl} g^{jk}),\tag{1.10}$$

де  $\lambda$ ,  $\mu$  - коефіцієнти Ляме.

В розглядаємій точці тіла коефіцієнти Ляме пов'язані із значенням модуля пружності  $E$  і коефіцієнта Пуассона  $\nu$  співвідношеннями

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.\tag{1.11}$$

Розглядаємо неоднорідне ізотропне тверде тіло котре обмежене шматково-гладкою поверхнею  $S$ . На частині, котру обмежують поверхня  $S_1$  задані кінематичні граничні умови, на частині  $S_2$  - зовнішнє навантаження

$q(t) = q^j e_j$ . Допускається, що для тіла, що розглядається на поверхнях  $x^1 = const$  и  $x^2 = const$ , котрі належать поверхні  $S_1$ , кінематичні граничні умови постійні впродовж координати  $x^3$  на всьому інтервалі інтегрування. На поверхнях  $x^3 = const$ , котрі належать  $S_2$ , граничні умови допускаються вільні. Наряду з поверхневими навантаженнями, на тіло діють об'ємні сили  $p(t) = p^j e_j$ . Тут і в подальшому приведемо опускання тимчасового індексу навантажень.

Зміну напружено-деформованого стану просторових тіл в криволінійній системі координат при нестационарних зовнішніх впливах, описується системою диференціальних рівнянь руху

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{g} C_k^{j'} \sigma^{ki} \right) + p^{j'} = \rho \ddot{u}^{j'}. \quad (1.12)$$

з незалежними від часу граничними

$$u^{j'} \Big|_{S_1} = \bar{u}^{j'}(Z^1, Z^2, Z^3) \quad (1.13)$$

і початковими умовами

$$u^{j'} \Big|_{t=0} = u^{j'o}(Z^1, Z^2, Z^3), \quad \dot{u}^{j'} \Big|_{t=0} = \dot{u}^{j'o}(Z^1, Z^2, Z^3) \quad (1.14)$$

де  $\ddot{u}^{j'}$ ,  $\dot{u}^{j'}$  відповідно прискорення і швидкості точок тіла в базисній системі координат;

$\sigma^{ki}$  – тензор напружень в місцевій системі координат.

Диференційному рівнянню руху (1.12) з граничними (1.13) та початковими (1.14) умовами відповідає варіаційний принцип Гамільтона [2], котрий в задачах вимушених коливань формується в вигляді

$$\int_t (\delta W + \delta K) dt = \int_t \delta A dt. \quad (1.15)$$

де  $\delta W = \int_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$  – варіація енергії деформації тіла;

$\delta K = \int_V \rho u^i \ddot{\delta u}_i dV$  – варіація кінетичної енергії тіла;

$\delta A$  – варіація роботи зовнішніх сил.

$$\delta A = \int_{S_2} q^{j'} \delta u_{j'} dS_q + \int_V p^{j'} \delta u_{j'} dV, \quad (1.16)$$

де  $q^{j'}$ ,  $p^{j'}$  – поверхневе і об'ємне навантаження, котре довільно змінюється в часі.

Варіаційне рівняння руху (1.15) можна переписати в наступний вид

$$\int_t (\delta W + \delta K - \delta A) dt = 0. \quad (1.17)$$

Рішення варіаційного рівняння руху (1.17) може бути знайдено тільки при рівності нулю його підінтегрального виразу. Тоді варіаційне рівняння руху в задачах на вимушені коливання (1.15) прийме наступний вигляд

$$\int_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_V \rho u^i \ddot{\delta u}_i dV = \int_{S_2} q^{j'} \delta u_{j'} dS_q + \int_V p^{j'} \delta u_{j'} dV. \quad (1.18)$$

В задачах про вільні коливання просторових тіл відсутній зовнішній вплив  $\delta A = 0$ , тому варіаційне рівняння руху в задачах про вільні коливання (1.15) прийме наступний вигляд



$$\int_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_V \rho u^{i'} \ddot{\delta} u_{i'} dV = 0 \quad (1.19)$$

В процесі вільних коливань зміна в часі параметрів напружено-деформованого стану системи проходить по гармонічному закону

$$\begin{aligned} u_{i'} &= \varphi_{i'}^k \cos \omega^k t; \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^k \cos \omega^k t; \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ijk} \cos \omega^k t; \quad i, j = 1, 2, 3.$$

де  $\varepsilon_{ij}^k$ ,  $\sigma^{ijk}$  - амплітуди коливань відповідно напружень і  $k$ -ї власної форми;

$\varphi_{i'}^k$ ,  $\omega^k$  - відповідно  $k$ -та власна форма і частота вільних коливань твердого тіла.

Підставив співвідношення (1.20) в (1.19) і опустив індекс  $k$ , варіаційне рівняння руху (1.19) прийме наступний вигляд

$$\int_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_V \omega^2 \rho \varphi^{i'} \delta \varphi_{i'} dV = 0. \quad (1.22)$$

## 1.2. Кільцевий скінчений елемент

Для апроксимації тіла обертання скінчений елемент (СЕ) приймається в вигляді кільця з довільним чотирикутним поперечним перерізом (рис. 1.2). В місцевій системі координат меридіональний переріз СЕ представляє собою квадрат з одиничними сторонами. Індекси  $S_{(1)}$  і  $S_{(2)}$  визначають положення вузла відносно центру меридіонального перерізу і приймають значення  $\pm 1$ . Початок системи координат  $x^i$  розташовано в геометричному центрі елемента, вісі  $x^1$  і  $x^2$  направлені паралельно сторонам меридіонального перерізу, а  $x^3$  суміщена з  $Z^3$ .

Припускається, що тензор пружних постійних  $C^{ijkl}$ , щільність матеріалу  $\rho$  і метричний тензор  $g_{ij}$  незначно змінюються в межах меридіонального перерізу елемента і приймаються рівними відповідним значенням в центрі перерізу. В здовж кругової координати ніяких обмежень на зміну фізико-механічних характеристик елемента не накладається.

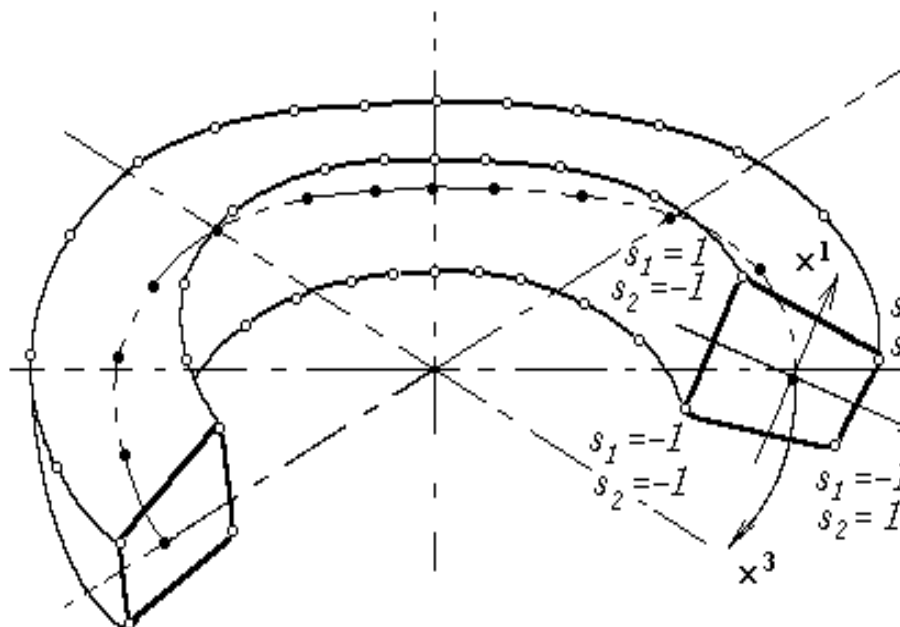


Рисунок 1.2. Кільцевий скінчений елемент.

Апроксимація переміщень і прискорень розглядуемого СЕ по круговій координаті, в силу замкнутості СЕ і постійності його геометричних параметрів по круговій координаті, описується  $2\pi$  - періодичними функціями  $Z^3$ , а так як розглядається тіла обертання, котрі мають хоч би одну площину симетрії, то вузлові значення переміщень і прискорень СЕ істотно представити відрізками ряду Фур'є

$$\begin{aligned}
 u_{\alpha'}(s_{(1)}, s_{(2)}) &= \frac{u_{\alpha'}^0(s_{(1)}, s_{(2)})}{2} + \sum_{l=1}^L u_{\alpha' l}^0(s_{(1)}, s_{(2)}) \cos(lx^3); \\
 u_{3'}(s_{(1)}, s_{(2)}) &= \sum_{l=1}^L u_{3' l}^0(s_{(1)}, s_{(2)}) \sin(lx^3). \\
 \ddot{u}_{\alpha'}(s_{(1)}, s_{(2)}) &= \frac{\ddot{u}_{\alpha'}^0(s_{(1)}, s_{(2)})}{2} + \sum_{l=1}^L \ddot{u}_{\alpha' l}^0(s_{(1)}, s_{(2)}) \cos(lx^3); \\
 \ddot{u}_{3'}(s_{(1)}, s_{(2)}) &= \sum_{l=1}^L \ddot{u}_{3' l}^0(s_{(1)}, s_{(2)}) \sin(lx^3).
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

де  $\alpha' = 1, 2$ ;

$u_{k'l}^0(s_{(1)}, s_{(2)})$ ,  $\ddot{u}_{k'l}^0(s_{(1)}, s_{(2)})$  - відповідно амплітудні вузлові значення коефіцієнтів  $l$ -ого члена розкладення переміщень і прискорень.

Амплітуди коефіцієнтів членів розкладення переміщень і прискорень в (1.23) визначається із співвідношень

$$\overset{\circ}{u} \alpha'_{\circ} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u \alpha' \left( s_{(1)}, s_{(2)} \right) dx^3,$$

$$\overset{\circ}{u} \alpha' l \left( s_{(1)}, s_{(2)} \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u \alpha' \left( s_{(1)}, s_{(2)} \right) \cos \left( lx^3 \right) dx^3,$$

$$\overset{\circ}{u} \alpha' l \left( s_{(1)}, s_{(2)} \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u \alpha' \left( s_{(1)}, s_{(2)} \right) \sin \left( lx^3 \right) dx^3.$$

$$\overset{\circ}{\ddot{u}} \alpha'_{\circ} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ddot{u} \alpha' \left( s_{(1)}, s_{(2)} \right) dx^3, \quad (1.24)$$

$$\overset{\circ}{\ddot{u}} \alpha' l \left( s_{(1)}, s_{(2)} \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ddot{u} \alpha' \left( s_{(1)}, s_{(2)} \right) \cos \left( lx^3 \right) dx^3,$$

$$\overset{\circ}{\ddot{u}} \alpha' l \left( s_{(1)}, s_{(2)} \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ddot{u} \alpha' \left( s_{(1)}, s_{(2)} \right) \sin \left( lx^3 \right) dx^3.$$

В межах меридіонального перерізу переміщення і прискорення СЕ змінюються по білінійному закону

$$u_{k'} = \sum_{s_{(1)}} \sum_{s_{(2)}} u_{k'} \left( s_{(1)}, s_{(2)} \right) \prod_{n=1}^2 \left( S_{(n)} x^{(n)} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.25)$$

$$\ddot{u}_{k'} = \sum_{s_{(1)}} \sum_{s_{(2)}} \ddot{u}_{k'} \left( s_{(1)}, s_{(2)} \right) \prod_{n=1}^2 \left( S_{(n)} x^{(n)} + \frac{1}{2} \right).$$

Застосування моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) [2] дозволяє значно підвищити ефективність численного досліджень масивних і тонкостінних просторових конструкцій на основі МСЕ [3, 4, 5]. Крім того, МССЕ забезпечує відсутність деформацій при зміщенні тіла як жорсткого цілого, а також усуває явище неправдивого зсуву, яке виникає при розрахунку тонкостінних конструкцій за допомогою просторових СЕ. Суть методики зводиться до відкидання або мінімізації деяких членів розкладу деформацій в степеневий ряд, реагуючих на жорсткі зміщення.

В відповідності з основними положеннями МССЕ компоненти тензора деформацій представляються відрізками ряду Маклорена.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\alpha\alpha}^L &= \varepsilon_{\alpha\alpha}^{\circ L} + \varepsilon_{\alpha\alpha, (3-\alpha)}^{\circ L} x^{(3-\alpha)}, & \varepsilon_{\alpha\alpha}^H &= \varepsilon_{\alpha\alpha}^{\circ H} + \varepsilon_{\alpha\alpha, (3-\alpha)}^{\circ H} x^{(3-\alpha)}, \\
 \varepsilon_{12}^L &= \varepsilon_{12}^{\circ L}, & \varepsilon_{12}^H &= \varepsilon_{12}^{\circ H}, \\
 \varepsilon_{\alpha 3}^L &= \varepsilon_{\alpha 3}^{\circ L} + \varepsilon_{\alpha 3, (3-\alpha)}^{\circ L} x^{(3-\alpha)}, & \varepsilon_{\alpha 3}^H &= \varepsilon_{\alpha 3}^{\circ H} + \varepsilon_{\alpha 3, (3-\alpha)}^{\circ H} x^{(3-\alpha)}, \\
 \varepsilon_{33}^L &= \varepsilon_{33}^{\circ L} + \varepsilon_{33, \beta}^{\circ L} x^\beta, & \varepsilon_{33}^H &= \varepsilon_{33}^{\circ H} + \varepsilon_{33, \beta}^{\circ H} x^\beta, \\
 \varepsilon_{ij}^L &= \varepsilon_{ij}^{\circ L} \Big|_{x^\alpha=0}, & \varepsilon_{ij}^H &= \varepsilon_{ij}^{\circ H} \Big|_{x^\alpha=0}, & \varepsilon_{ij, \beta} &= \frac{d\varepsilon_{ij}}{dx^\beta} \Big|_{x^\alpha=0}.
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

Коефіцієнтом розкладання  $\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{x^\alpha=0}$  нехтуємо як величиною більш

високого порядку малості.

В круговому напрямку деформації і їх похідні розкладаються в ряд Фур'є, число членів якого відповідає порядку апроксимації коефіцієнтів членів розкладення форми (1.24)

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \sum_{l=0}^L \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^l \cos(lx^3) + \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^l \sin(lx^3). \quad (1.27)$$

Компоненти тензора напружень також представляються відрізками Маклорена

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha} &= \overset{\circ}{\sigma}_{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\sigma}_{\alpha\alpha, (3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \\ \sigma_{12} &= \overset{\circ}{\sigma}_{12}, \\ \sigma_{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\sigma}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\sigma}_{\alpha 3, (3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \\ \sigma_{33} &= \overset{\circ}{\sigma}_{33} + \overset{\circ}{\sigma}_{33, \beta} x^{\beta}, \\ \overset{\circ}{\sigma}_{ij} &= \sigma_{ij} \Big|_{x^{\alpha}=0}, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{ij, \beta} = \frac{d\sigma_{ij}}{dx^{\beta}} \Big|_{x^{\alpha}=0}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Напруження і їх похідні представляються відрізками ряду Фур'є по круговій координаті  $x^3$

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} = \sum_{l=0}^L \overset{\circ}{\sigma}_{ij}^l \cos(lx^3) + \overset{\circ}{\sigma}_{ij}^l \sin(lx^3), \quad (1.29)$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij, \alpha} = \sum_{l=0}^L \overset{\circ}{\sigma}_{ij, \alpha l}^l \cos(lx^3) + \overset{\circ}{\sigma}_{ij, \alpha l}^l \sin(lx^3);$$

Коефіцієнти розкладення в (1.29) визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\sigma}_{0}^{ij} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{\circ}{\sigma}^{ij} dx^3, & \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha 0}^{ij} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij} dx^3, \\
\overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \overset{\circ}{\sigma}^{ij} \cos(lx^3) dx^3, & \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij} \cos(lx^3) dx^3, \\
\overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \overset{\circ}{\sigma}^{ij} \sin(lx^3) dx^3, & \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij} \sin(lx^3) dx^3.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Інтегрування в (1.30) виконується числено по формулам гармонічного аналізу

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\sigma}_0^{ij} &= \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_n^{ij}, & \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha 0}^{ij} &= \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha n}^{ij}, \\
\overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_n^{ij} \cos\left(\frac{l\pi n}{N}\right), & \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha n}^{ij} \cos\left(\frac{l\pi n}{N}\right), \\
\overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_n^{ij} \sin\left(\frac{l\pi n}{N}\right), & \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha n}^{ij} \sin\left(\frac{l\pi n}{N}\right),
\end{aligned} \tag{1.31}$$

де  $\overset{\circ}{\sigma}_n^{ij}$  і  $\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha n}^{ij}$  - координатні значення напружень і їх похідних в центрі меридіональних перерізів, які відповідають точкам інтегрування;

$2N$  – загальне число точок інтегрування по круговій координаті в інтервалі  $0-2\pi$ , котре необхідне для обчислення амплітудних значень впритул до  $l = L$  включно.

### 1.3. Розрахункові співвідношення НМСЕ для визначення динамічних характеристик однорідних і неоднорідних тіл обертання

Розглянемо варіацію енергії деформації СЕ в місцевій системі координат

$$\delta W = \int_{x^1} \int_{x^2} \int_{x^3} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (1.34)$$

де  $\sigma^{ij}, \varepsilon_{ij}$  - амплітудні значення напружень і деформацій.

Представимо компоненти тензора напружень і деформацій згідно основним положенням НМСЕ (1.26) і (1.28) отримаємо

$$\delta W = \int_{x^1} \int_{x^2} \int_{x^3} (\sigma^{ij} + \sigma_{,\alpha} x^\alpha) (\delta \varepsilon_{ij} + \delta \varepsilon_{ij,\beta} x^\beta) \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.35)$$

Виконаємо інтегрування по площі меридіонального перерізу СЕ з врахуванням того, що  $-0.5 \leq x^1 \leq 0.5$ ;  $-0.5 \leq x^2 \leq 0.5$ ; і співвідношень (1.36)

$$\int_{x^1} \int_{x^2} dx^1 dx^2 = 1, \quad \int_{x^1} \int_{x^2} x^\alpha dx^1 dx^2 = 0, \quad \int_{x^1} \int_{x^2} x^\alpha x^\beta dx^1 dx^2 = \begin{cases} 0, \alpha \neq \beta. \\ \frac{1}{12}, \alpha = \beta. \end{cases}$$

$$\int_{x^1} \int_{x^2} x^\alpha x^1 x^2 dx^1 dx^2 = 0, \quad \int_{x^1} \int_{x^2} (x^1)^2 (x^2)^2 dx^1 dx^2 = \frac{1}{144}. \quad (1.36)$$

отримаємо

$$\delta W = \int_{x^3} \left( \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{1}{12} \sigma_{,\alpha} \delta \varepsilon_{ij,\alpha} \right) \sqrt{g} dx^3. \quad (1.37)$$



Представимо компоненти тензорів напружень, деформацій і їх похідних в центрі меридіональних перерізів елемента відрізками ряду Фур'є по круговій координаті (1.27) і (1.29)

$$\begin{aligned} \delta W = \int_{x^3} \left[ \sum_{m=0}^L \left( \overset{\circ}{\sigma}_{m}^{ij} \cos mx^3 + \overset{\circ}{\sigma}_{m}^{ij} \sin mx^3 \right) \sum_{l=0}^L \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^l \cos lx^3 + \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^l \sin lx^3 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{12} \sum_{m=0}^L \left( \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha m}^{ij} \cos mx^3 + \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha m}^{ij} \sin mx^3 \right) \sum_{l=0}^L \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha}^l \cos lx^3 + \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha}^l \sin lx^3 \right) \right] \sqrt{g} dx^3. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Виконаємо інтегрування в (1.38), враховуючи постійність геометричних характеристик СЕ вздовж кругової координати, а також ортогональність тригонометричних функцій в інтервалі  $0-2\pi$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin mx^3 \cos lx^3 dx^3 = 0, \\ \left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin mx^3 \sin lx^3 dx^3 \\ \int_0^{2\pi} \cos mx^3 \cos lx^3 dx^3 \end{aligned} \right\} = \begin{cases} 0, & l \neq m. \\ \pi, & l = m. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Тоді варіація енергії деформації елемента можливо представити в вигляді суми амплітудних складових

$$\delta W = \sum_{l=0}^L \delta W_l, \quad (1.40)$$

$$\text{де } \delta W_l = \pi \left[ \frac{\overset{\circ}{\sigma}^{ij} \overset{\circ}{\varepsilon}^l_{ij}}{\sigma_l \varepsilon_{ij}} + \frac{\overset{\circ}{\sigma}^{ij} \overset{\circ}{\varepsilon}^l_{ij}}{\sigma_l \varepsilon_{ij}} + \frac{1}{12} \left( \frac{\overset{\circ}{\sigma}^{ij} \overset{\circ}{\varepsilon}^l_{ij, \alpha}}{\sigma_{, \alpha l} \varepsilon_{ij, \alpha}} + \frac{\overset{\circ}{\sigma}^{ij} \overset{\circ}{\varepsilon}^l_{ij, \alpha}}{\sigma_{, \alpha l} \varepsilon_{ij, \alpha}} \right) \right] \sqrt{g}.$$

Для компактності представлення запишемо (1.40) в векторній формі

$$\delta W_l = \pi \sum_{\beta=1}^2 \left( \delta \left\{ \varepsilon_{\beta} \right\}_l^T \left\{ \sigma_{\beta} \right\}_l + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \delta \left\{ \varepsilon_{\beta} \right\}_{\alpha l}^T \left\{ \sigma_{\beta} \right\}_{\alpha l} \right) \right) \sqrt{g}. \quad (1.41)$$

Тут введені наступні позначення

$$\begin{aligned} \left\{ \varepsilon_1 \right\}_l^T &= \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11}^l \quad 2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^l \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{22}^l \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^l \right\}, & \left\{ \varepsilon_2 \right\}_l^T &= \left\{ 2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{23}^l \quad 2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{13}^l \right\}, \\ \left\{ \varepsilon_1 \right\}_{\alpha l}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{(3-\alpha)(3-\alpha), \alpha}^l \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33, \alpha}^l \right\}, & \left\{ \varepsilon_1 \right\}_{\alpha l}^T &= \left\{ 2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{(3-\alpha)3, \alpha}^l \right\}, \\ \left\{ \sigma_1 \right\}_l &= \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_l^{11} \quad \overset{\circ}{\sigma}_l^{12} \quad \overset{\circ}{\sigma}_l^{22} \quad \overset{\circ}{\sigma}_l^{33} \right\}, & \left\{ \sigma_2 \right\}_l &= \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_l^{23} \quad \overset{\circ}{\sigma}_l^{13} \right\}, \\ \left\{ \sigma_1 \right\}_{\alpha l} &= \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_l^{(3-\alpha)(3-\alpha), \alpha} \quad \overset{\circ}{\sigma}_l^{33, \alpha} \right\}, & \left\{ \sigma_2 \right\}_{\alpha l} &= \left\{ 2 \overset{\circ}{\sigma}_l^{(3-\alpha)3, \alpha} \right\}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Виразимо амплітудні складові і їх похідні в центрі меридіональних перерізів СЕ через вузлові значення амплітудних переміщень на основі співвідношень Коши

$$\left\{ \varepsilon_{\beta} \right\}_l = \left[ B_{\beta} \right]_l \{u\}_l, \quad \left\{ \varepsilon_{\beta} \right\}_{\alpha l} = \left[ B_{\beta} \right]_{\alpha l} \{u\}_l, \quad (1.43)$$

$$\text{де } \{u\}_l = \left\{ u_{i'(s_{(1)}, s_{(2)})}^l \right\}.$$

Для зручності представлення розіб'ємо матрицю на блоки

$$[B_1]_l = \begin{bmatrix} [b_1]^{(-1,-1)} & [b_1]^{(1,-1)} & [b_1]^{(-1,1)} & [b_1]^{(1,1)} \end{bmatrix}. \quad (1.44)$$

Аналогічну операцію виконаємо для матриць  $[B_2]_l$ ,  $[B_1]_{al}$ ,  $[B_2]_{al}$ .

Підставимо (1.40) в вираз для амплітудної складової варіації енергії деформації, отримаємо

$$\delta W_l = \pi \delta \{u\}_l^T \{r\}_l. \quad (1.45)$$

$$\text{де } \{r\}_l = \left\{ \sum_{\beta=1}^2 [B_\beta]_l^T \{\sigma_\beta\}_l + \frac{1}{12} [B_\beta]_{al}^T \{\sigma_\beta\}_{al} \right\} \sqrt{g} \quad - \text{ амплітудні}$$

реакції у вузлах СЕ.

Компоненти векторів амплітудних напружень визначаються по координатним значенням компонентів тензорів координатних деформацій в кожному меридіональному перерізі СЕ.

Скомпонуємо координатні значення параметрів напружено-деформованого стану аналогічно (1.42)

$$\{\varepsilon_1\}^T = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} & 2\varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{33} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon_2\}^T = \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{13} & 2\varepsilon_{13} \end{Bmatrix}, \quad (1.46)$$

$$\{\sigma_1\}^T = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{33} \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma_2\}^T = \begin{Bmatrix} \sigma_{13} & \sigma_{13} \end{Bmatrix}.$$

Зв'язок між введеними векторами здійснюється залежностями

$$\left\{ \sigma_{\beta} \right\} = \left[ D_{\beta} \right] \left\{ \varepsilon_{\beta} \right\}, \quad \left\{ \sigma_{\beta} \right\}_{\alpha} = \left[ D_{\beta} \right]_{\alpha} \left\{ \varepsilon_{\beta} \right\}_{\alpha}. \quad (1.47)$$

$\alpha, \beta = 1, 2$ .

Матриці  $[D_1]$ ,  $[D_2]$ ,  $[D_1]_{\alpha}$ ,  $[D_2]_{\alpha}$  сформовані із компонентів тензорів пружних постійних, котрі враховують неоднорідність матеріалу, і обчислюються в кожному меридіональному перерізі СЕ.

Вектори повних деформацій і їх похідних в центрі меридіональних перерізів елемента визначаються по координатним значенням вузлових переміщень  $\{u_k\}$  і їх похідних по круговій координаті  $\{u_p\}$

$$\left\{ \varepsilon_{\beta} \right\} = \left[ C_{\beta}^k \right] \{u_k\} + \left[ C_{\beta}^p \right] \{u_p\}, \quad (1.48)$$

$$\left\{ \varepsilon_{\beta} \right\}_{\alpha} = \left[ C_{\beta}^k \right]_{\alpha} \{u_k\} + \left[ C_{\beta}^p \right]_{\alpha} \{u_p\},$$

$$\text{де } \{u_k\} = \left\{ u_{i'(s_{(1)}, s_{(2)})} \right\}, \quad \{u_p\} = \left\{ \frac{\partial u_{i'(s_{(1)}, s_{(2)})}}{\partial x^3} \right\}.$$

Переходячи до векторної форми запису, маємо

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_{x^3} \left\{ \sum_{l=0}^L \delta \left\{ \varepsilon_1 \right\}_l^T \cos lx^3 \left[ D_1 \right] \sum_{m=0}^L \left\{ \varepsilon_1 \right\}_m \cos mx^3 + \sum_{l=0}^L \delta \left\{ \varepsilon_2 \right\}_l^T \sin lx^3 \left[ D_2 \right] \right. \\ & \times \sum_{m=0}^L \left\{ \varepsilon_2 \right\}_m \sin mx^3 + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \sum_{l=0}^L \delta \left\{ \varepsilon_1 \right\}_{\alpha l}^T \cos lx^3 \left[ D_1 \right]_{\alpha} \sum_{m=0}^L \left\{ \varepsilon_1 \right\}_{\alpha m} \cos mx^3 + \right. \\ & \left. \left. + \sum_{l=0}^L \delta \left\{ \varepsilon_2 \right\}_{\alpha l}^T \sin lx^3 \left[ D_2 \right]_{\alpha} \sum_{m=0}^L \left\{ \varepsilon_2 \right\}_{\alpha m} \sin mx^3 \right] \right\} \sqrt{g} dx^3. \quad (1.49) \end{aligned}$$

У випадку, якщо розглядаємо тіло являється неоднорідним в круговому напрямку, тоді компоненти матриць пружних постійних враховують неоднорідність в круговому напрямку (різномірність матеріалів або порушення вісесиметричності в наслідок вирізів) і інтегрування в (1.49) необхідно виконувати числено. Представивши амплітудні деформації через амплітудні значення вузлових переміщень, варіацію енергії деформації СЕ запишемо у вигляді

$$\delta W = \pi \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^L \delta \{u\}_l^T [k]^{lm} \{u\}_m, \quad (1.50)$$

де  $[k]^{lm}$  - матриця жорсткості неоднорідного в круговому напрямку СЕ визначається виразом

$$[k]^{lm} = \left[ \sum_{\beta=1}^2 [B_{\beta}]_l^T [D_{\beta}]^{lm} [B_{\beta}]_m + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 [B_{\beta}]_{\alpha l}^T [D_{\beta}]_{\alpha}^{lm} [B_{\beta}]_{\alpha m} \right] \sqrt{g}. \quad (1.51)$$

Тут приведені наступні позначення

$$\begin{aligned} [D_1]^{lm} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} [D_1]^k \cos l \frac{\pi k}{N} \cos m \frac{\pi k}{N}, \\ [D_2]^{lm} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} [D_2]^k \sin l \frac{\pi k}{N} \sin m \frac{\pi k}{N}, \\ [D_1]_{\alpha}^{lm} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} [D_1]_{\alpha}^k \cos l \frac{\pi k}{N} \cos m \frac{\pi k}{N}, \\ [D_2]_{\alpha}^{lm} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} [D_2]_{\alpha}^k \sin l \frac{\pi k}{N} \sin m \frac{\pi k}{N}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

де  $[D_1]^k, [D_2]^k, [D_1]_\alpha^k, [D_2]_\alpha^k$  - матриці пружних постійних, обчислені в центрі меридіонального перерізу, котрий відповідає  $k$ -ой точці інтегрування в інтервалі  $0 - 2\pi$ .

Якщо тіло, що розглядається являється однорідним в круговому напрямку, тоді інтегрування (1.49) можливо визначити аналітичним шляхом, враховуючи ортогональність тригонометричних функцій в інтервалі  $0 - 2\pi$  (1.39). Тоді варіація енергії деформації однорідного СЕ буде мати вигляд

$$\delta W = \pi \sum_{l=0}^L \delta\{u\}_l^T [k]^{ll} \{u\}_l \quad (1.53)$$

Варіація кінетичної енергії СЕ в задачах на власні коливання тіл обертання в місцевій системі координат має вигляд

$$\delta K = \omega^2 \int_{x^1} \int_{x^2} \int_{x^3} \rho \delta u^{i'} u_{i'} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.54)$$

Підставив (1.25) в (1.54) і виконав інтегрування по площі меридіонального перерізу СЕ з врахуванням (1.36) отримаємо

$$\begin{aligned} \delta K &= \omega^2 \int_{x^1} \int_{x^2} \int_{x^3} \rho \left[ \sum_{s(1)} \sum_{s(2)} \delta u_{i'(s(1), s(2))} \prod_{n=1}^2 \left( S_{(n)} x^{(n)} + \frac{1}{2} \right) g^{i' i'} \right] \times \\ &\times \sum_{P(1)} \sum_{P(2)} u_{i'(P(1), P(2))} \prod_{n=1}^2 \left( P_{(n)} x^{(n)} + \frac{1}{2} \right) \left[ \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 = \right. \quad (1.55) \\ &= \omega^2 \int_{x^3} \rho \sum_{s(1)} \sum_{s(2)} \sum_{P(1)} \sum_{P(2)} \delta u_{i'(s(1), s(2))} \frac{\prod_{n=1}^2 \left( S_{(n)} P_{(n)} + 3 \right)}{144} g^{i' i'} u_{i'(P(1), P(2))} \sqrt{g} dx^3. \end{aligned}$$

Апроксимуючи вузлові значення функції форми по круговому напрямку відрізками ряду Фур'є (1.23)

$$\delta K = \omega^2 \int_{x^3} \rho \sum_{s(1)} \sum_{s(2)} \sum_{P(1)} \sum_{P(2)} \left( \sum_{l=0}^L \delta u^{i'l}(s_{(1)}, s_{(2)}) \psi_{i'}(lx^3) \times \right. \\ \left. \times g^{i'i'} \sum_{m=0}^L u_{i'}^m(p_{(1)}, p_{(2)}) \psi_{i'}(mx^3) \right) \times \frac{1}{144} \prod_{n=1}^2 (S_{(n)} P_{(n)} + 3) \sqrt{g} dx^3, \quad (1.56)$$

$$\text{де } \psi_{i'}(mx^3) = \begin{cases} \cos(mx^3); & i'=1,2 \\ \sin(mx^3); & i'=3 \end{cases}.$$

Про інтегрувавши (1.56) по  $x^3$  з врахуванням (1.39) і записавши вираз варіації роботи інерційних сил неоднорідного СЕ в матричній формі отримаємо

$$\delta K = \pi \omega^2 \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^L \delta \{u\}_l [m]^{lm} \{u\}_m, \quad (1.57)$$

де  $[m]^{lm}$  - амплітудна узгоджена матриця мас неоднорідного СЕ;

$\{u\}_m$  - амплітудний вузловий вектор коефіцієнтів  $m$ -ого члена розкладання форми.

Вони відповідно мають структуру

$$[m]^{lm} = \begin{bmatrix} [m]_{11}^{11} & [m]_{11}^{1-1} & [m]_{11}^{-11} & [m]_{11}^{-1-1} \\ [m]_{1-1}^{11} & [m]_{1-1}^{1-1} & [m]_{1-1}^{-11} & [m]_{1-1}^{-1-1} \\ [m]_{-11}^{11} & [m]_{-11}^{1-1} & [m]_{-11}^{-11} & [m]_{-11}^{-1-1} \\ [m]_{-1-1}^{11} & [m]_{-1-1}^{1-1} & [m]_{-1-1}^{-11} & [m]_{-1-1}^{-1-1} \end{bmatrix}^{lm}, \quad (1.58)$$

$$\{u\}_I = \left\{ u_1^{-1-1} \quad u_2^{-1-1} \quad u_3^{-1-1} \quad u_1^{1-1} \quad u_2^{1-1} \quad u_3^{1-1} \quad u_1^{-11} \quad u_2^{-11} \quad u_3^{-11} \quad u_1^{11} \quad u_2^{11} \quad u_3^{11} \right\}_I^T,$$

де  $[m]_{P(1)P(2)}^{S(1)S(2)}$  - ампліудна під матриця матриці мас СЕ із відносними

координатами вузлів  $(s_{(1)}, s_{(2)})$  и  $(p_{(1)}, p_{(2)})$ ,

$u_{i'}^{s(1)s(2)}$  - переміщення вузла з відносними координатами  $(s_{(1)}, s_{(2)})$  в  $i'$ -

ому напрямку.

Ампліудна підматриця матриці мас СЕ представляє собою квадратну симетрично додатньо-визначену матрицю [3x3]

$$[m]_{11}^{11} = [m]_{1-1}^{1-1} = [m]_{-11}^{-11} = [m]_{-1-1}^{-1-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \rho_{lm}^{1'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} \rho_{lm}^{2'} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \frac{\rho_{lm}^{3'}}{(Z^{2'})^2} \end{bmatrix},$$

$$[m]_{-11}^{11} = [m]_{1-1}^{11} = [m]_{-1-1}^{1-1} = [m]_{11}^{1-1} = [m]_{11}^{-11} = [m]_{-1-1}^{-11} = [m]_{-11}^{-1-1} = [m]_{1-1}^{-1-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{18} \rho_{lm}^{1'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} \rho_{lm}^{2'} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{18} \frac{\rho_{lm}^{3'}}{(Z^{2'})^2} \end{bmatrix},$$



$$[m]_{-1-1}^{11} = [m]_{-11}^{1-1} = [m]_{1-1}^{-11} = [m]_{11}^{-1-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{36} \rho_{lm}^{1'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{36} \rho_{lm}^{2'} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{36} \frac{\rho_{lm}^{3'}}{(Z^2)^2} \end{bmatrix}, \quad (1.59)$$

$$\text{де } \rho_{lm}^{i'} = k_{lm} \int_{X^3} \rho \psi_{i'}(lx^3) \psi_{i'}(mx^3) dx^3, \quad k_{lm} = \begin{cases} 0.25 & l=0; \quad m=0 \\ 0.5 & l \neq 0; \quad m=0 \\ & l=0; \quad m \neq 0 \\ 1. & l \neq 0; \quad m \neq 0 \end{cases}, \quad (1.60)$$

При формуванні амплітудної матриці мас неоднорідного СЕ, враховується зміна щільності матеріалу по круговій координаті (різномірність матеріалу, вирізи), тому визначення інтегральної щільності матеріалу  $\rho_{lm}^{i'}$  необхідно визначити числено

$$\rho_{lm}^{i'} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} \rho^k \psi_{i'}\left(l \frac{\pi k}{N}\right) \psi_{i'}\left(m \frac{\pi k}{N}\right), \quad (1.61)$$

де  $\rho^k$  - щільність матеріалу в  $k$ -ому меридіональному перерізі кільцевого скінченного елемента.

У випадку, якщо тіло обертання, що розглядається, однорідне в круговому напрямку, то вираз для варіації роботи інерційних сил однорідного СЕ (1.57), враховуючи ортогональність тригонометричних функцій на інтервалі  $0-2\pi$  (1.39).

$$\delta K = \pi \omega^2 \sum_{l=0}^L \delta \{u\}_l [m]^{ll} \{u\}_l, \quad (1.62)$$

Так, як при формуванні коефіцієнтів амплітудної матриці жорсткості беруть участь поліноми більш низької степені (перші похідні), чим при формуванні коефіцієнтів амплітудної матриці мас і, відповідно, сходимість численного рішення визначається сходимістю потенційної енергії деформації, тому доцільно понизити порядок поліномів, котрі використовуються для обчислення амплітудної матриці мас. В цьому випадку за рахунок по вузловій схемі інтегрування по площі поперечного перерізу елемента ми отримаємо узгоджену (діагональну) амплітудну матрицю мас

СЕ, в якій всі підматриці  $[m]_{P(1)P(2)}^{S(1)S(2)}$  матриці мас СЕ дорівнюють

$$[m]_{P1P2}^{S1S2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \rho_{lm}^{1'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \rho_{lm}^{2'} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \frac{\rho_{lm}^{3'}}{(Z^{2'})^2} \end{bmatrix}.$$

(1.63)

Таким чином, вираз (1.22) для неоднорідного тіла обертання з врахуванням (1.50) і (1.57) в матричній формі запишеться в слідую чому вигляді

$$[K]^{lm} \{u\}_m - \omega^2 [M]^{lm} \{u\}_m = 0 \quad (1.64)$$

де  $l, m = 0, \dots, L$ .

Для однорідного тіла обертання вираз (1.22) з врахуванням (1.53) і (1.62) в матричній формі набуде наступний вигляд

$$[K]^{ll} \{u\}_l - \omega^2 [M]^{ll} \{u\}_l = 0 \quad (1.65)$$

## 2. Алгоритм визначення динамічних характеристик для однорідних і неоднорідних тіл обертання

Важливим етапом в реалізації обчислювальних систем для розв'язання просторових задач динаміки є вибір оптимальних, з точки зору швидкості і складності процесів деформування, алгоритмів інтегрування рівнянь руху у часі, особливістю яких в даній роботі є їх розвиток в рамках НМСЕ. Відомо, що вибір того чи іншого алгоритму пов'язаний із швидкістю протікання процесу деформування та характеру навантажень. При аналізі перехідних процесів найбільше розповсюдження отримав метод узагальнених координат, який припускає розклад розшукуваного рішення в ряд по формах власних коливань. В цілому, для розв'язання систем рівнянь динаміки рекомендовані прямі методи безпосереднього інтегрування по часовій координаті, залишаючи модальні методи для проблем, що пов'язані з використанням нижньої частини частотного спектру. Широке розповсюдження отримали неявні схеми інтегрування за часом (метод Н'юмарка, метод Вільсона), які допускають у порівнянні з явними значно більший крок по параметру. Специфіка алгебраїчних рівнянь НМСЕ зумовлена порушенням ортогональності базисних функцій у просторі оператора пружності для тіл із змінними вздовж направляючої параметрами жорсткості і мас. Явно виділена клітинна структура як матриці жорсткості, так і матриці мас, є підставою для використання алгоритмів, що комбінують прямі та ітераційні методи розв'язання. Поєднання ітераційних циклів, що з однієї сторони пов'язані з порушенням однорідності об'єкту вздовж направляючої, а з іншої є природними для самих алгоритмів (метод ітерацій у підпросторі) дозволяє значно зменшити обчислювальні витрати на розв'язання задачі. Для ефективного пошуку рішення задач динаміки, на сьогоднішній день, потрібно володіти всім набором засобів аналізу, чітко представляти правила і границі їх застосування. До того ж, високі вимоги до розрахункових моделей, що закладені до сучасної нормативної бази припускають розгляд динамічних

навантажень різного рівня інтенсивності, які можуть діяти на конструкцію в один і той же момент часу, що в свою чергу потребує ретельного дослідження меж достовірного використання того чи іншого алгоритму.

Задача визначення переміщень, швидкостей та прискорень традиційно зводиться до розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку для моменту часу  $t$ , яка отримана після просторової скінченно-елементної дискретизації [6]:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{Q\}. \quad (2.1)$$

Методика обчислення коефіцієнтів матриць мас  $[M]$ , жорсткості  $[K]$  та вектора зовнішніх навантажень  $\{Q\}$  на основі кільцевого незамкненого неоднорідного скінченного елемента з довільними граничними умовами на торцях приведена в роботі [7].

Початкові умови становить відомий розподіл переміщень та швидкостей в тілі у деякий фіксований момент часу  $t_0$ , який приймається за початок часової координати [8].:

$$\{U\}|_{t=t_0} = \{U_0\}, \quad \{\dot{U}\}|_{t=t_0} = \{\dot{U}_0\}. \quad (2.2)$$

Особливістю напіваналітичного метода скінченних елементів є характерна блокова структура амплітудних матриць та векторів вирішуючих рівнянь:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_{l_0 l_0} & \cdots & [K]_{l_0 m} & \cdots & [K]_{l_0 L} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [K]_{ll_0} & \cdots & [K]_{ll} & \cdots & [K]_{ll} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [K]_{Ll_0} & \cdots & [K]_{Lm} & \cdots & [K]_{LL} \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} [M]_{l_0 l_0} & \cdots & [M]_{l_0 m} & \cdots & [M]_{l_0 L} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [M]_{ll_0} & \cdots & [M]_{ll} & \cdots & [M]_{ll} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [M]_{Ll_0} & \cdots & [M]_{Lm} & \cdots & [M]_{LL} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \{U\}^T &= \{\{U\}_{l_0}^T \dots \{U\}_l^T \dots \{U\}_L^T\}, \\ \{\dot{U}\}^T &= \{\{\dot{U}\}_{l_0}^T \dots \{\dot{U}\}_l^T \dots \{\dot{U}\}_L^T\}, \\ \{\ddot{U}\}^T &= \{\{\ddot{U}\}_{l_0}^T \dots \{\ddot{U}\}_l^T \dots \{\ddot{U}\}_L^T\}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\{Q\}^T = \{\{Q\}_{l_0}^T \dots \{Q\}_l^T \dots \{Q\}_L^T\}. \quad (2.6)$$

Кожний блок матриць (2.3), (2.4) представляє собою стрічкову амплітудну підматрицю, що сформована для двовимірної сіткової області, яка апроксимує поперечний переріз тіла.

У класичному випадку НМСЕ, для однорідних вздовж направляючої тіл обертання при використанні базисних функцій у вигляді рядів Фур'є система рівнянь (2.1) розпадається на низку незалежних амплітудних систем для кожного із членів ряду:

$$[M]_{ll} \{\ddot{U}\}^l + [K]_{ll} \{U\}^l = \{Q\}_l^T, \quad l = l_0 \dots L. \quad (2.7)$$

При аналізі тіл обертання із змінними вздовж направляючої фізико-механічними параметрами або незамкнених тіл обертання з довільними граничними умовами не вдається досягти розділу змінних та подати задачу у вигляді (2.7).

**Розклад невідомих за власними формами.** В багатьох випадках для розв'язання системи звичайних диференційних лінійних рівнянь руху дискретної моделі (2.1) при заданих початкових умовах (2.2) використовується чисельний підхід заснований на розкладі розшукуваного рішення по формам власних коливань конструкції.

Перехід до нормальних координат здійснюється в результаті лінійного перетворення:

$$\{U\} = [\Phi]\{X\}, \quad (2.8)$$

де

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \{\Phi\}_{r_0}^I & \dots & \{\Phi\}_r^I & \dots & \{\Phi\}_\Omega^I \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\Phi\}_{r_0}^L & \dots & \{\Phi\}_r^L & \dots & \{\Phi\}_\Omega^L \end{bmatrix}, \quad \{X\}^T = \{x_{r_0} \dots x_r \dots x_\Omega\}, \quad (2.9)$$

$\{\Phi\}_r^I$  -  $I$ -та амплітуда  $r$ -ї власної форми дискретної моделі, що знаходиться за допомогою модального аналізу конструкції;  $x_r(t)$  - невідомі вагові коефіцієнти рішення для  $r$ -ої власної форми;  $\Omega$  - кількість власних форм, які утримуються при лінійному перетворенні.

Виконавши підстановку (2.8) в (2.1) і домноживши зліва на  $[\Phi]^T$ :

$$[\Phi]^T [M][\Phi]\{\ddot{X}\} + [\Phi]^T [K][\Phi]\{X\} = [\Phi]^T \{Q\}, \quad (2.10)$$

отримаємо систему рівнянь (2.10), яка з урахуванням ортогональності власних форм:

$$[\Phi]^T [M][\Phi] = [I], \quad [\Phi]^T [K][\Phi] = [\Lambda], \quad (2.11)$$

де

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{r_0} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_r & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_\Omega \end{bmatrix}, \quad \lambda_r - \text{власне значення } r\text{-ої власної форми,}$$

перетворюється до низки незалежних диференціальних рівнянь вигляду:

$$[I]\{\ddot{X}\} + [\Lambda]\{X\} = [\Phi]^T \{Q\} \quad (2.12)$$

з початковими умовами у вигляді:

$$\{X_0\} = [\Phi]^T [M] \{U_0\}, \{\dot{X}_0\} = [\Phi]^T [M] \{\dot{U}_0\}, \quad (2.13)$$

тут

$$\{X_0\}^T = \{x_{r_0}^{t_0} \dots x_r^{t_0} \dots x_{\Omega}^{t_0}\}, \{\dot{X}_0\}^T = \{\dot{x}_{r_0}^{t_0} \dots \dot{x}_r^{t_0} \dots \dot{x}_{\Omega}^{t_0}\}$$

Рішення звичайного диференційного рівняння 2-го порядку (2.12) подається інтегралом Дюамеля:

$$\{X\}^t = [CC]^t \{X\}^{t_0} + [SS]^t \{\dot{X}\}^{t_0} + \int_{t_0}^t [SS]^{t-\tau} [\Phi]^T \{Q\} d\tau, \quad (2.14)$$

де

$$[CC]^\tau = \text{diag}[\cos \theta_r \tau], [SS]^\tau = \text{diag}\left[\frac{\sin \theta_r \tau}{\theta_r}\right], \theta_r = \sqrt{\lambda_r}.$$

Для кожного з рівнянь можна записати

$$x_r^t = x_r^{t_0} \cos \theta_r t + \dot{x}_r^{t_0} \frac{\sin \theta_r t}{\theta_r} + \frac{1}{\theta_r} \int_{t_0}^t \sum_{l=l_0}^L \{\Phi\}_r^{lT} \{Q\}_l^\tau \sin \theta_r (t - \tau) d\tau, \quad (2.15)$$

Обчислення інтегралу виконується чисельно на основі формули прямокутників.

**Розв'язання проблеми власних значень.** Узагальнена проблема власних значень, з якої повинні бути визначені  $\Omega$  власних рішень, тобто амплітудні матриці  $[\Phi]$  та  $[\Lambda]$ , формулюється у вигляді

$$[K][\Phi] = [M][\Phi][\Lambda], \quad (2.16)$$

при цьому набір власних векторів  $[\Phi] \in [M]$  - ортогональним, тобто задовольняє умовам (2.11), та  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \dots \leq \lambda_r \dots \leq \lambda_{\Omega}$ .

При аналізі вільних коливань найбільш ефективним для визначення спектру власних форм та частот є метод зворотніх ітерацій у підпросторі з ортогоналізацією по Граму-Шмідту.

Використовуючи деякий набір початкових векторів  $[\tilde{Y}]_n$  на кожній ітерації  $n = 1, 2, \dots$  обчислюємо наступні наближення:

$$[K][\bar{Y}]_{n+1} = [Q]_n, \quad [Q]_n = [M][\tilde{Y}]_n \quad (2.17)$$

де

$$[Y] = \begin{bmatrix} \{Y\}_{r_0}^{l_0} & \dots & \{Y\}_r^{l_0} & \dots & \{Y\}_\Omega^{l_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{Y\}_{r_0}^l & \dots & \{Y\}_r^l & \dots & \{Y\}_\Omega^l \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{Y\}_{r_0}^L & \dots & \{Y\}_r^L & \dots & \{Y\}_\Omega^L \end{bmatrix}, \quad [Q] = \begin{bmatrix} \{Q\}_{r_0}^{l_0} & \dots & \{Q\}_r^{l_0} & \dots & \{Q\}_\Omega^{l_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{Q\}_{r_0}^l & \dots & \{Q\}_r^l & \dots & \{Q\}_\Omega^l \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{Q\}_{r_0}^L & \dots & \{Q\}_r^L & \dots & \{Q\}_\Omega^L \end{bmatrix}$$

Ортогоналізовані амплітудні вектори розшукуваного рішення, які формують амплітудну матрицю  $[Y]$  обчислюються у відповідності до процедури Грамма-Шмідта:

$$\{Y\}_{r,n+1}^l = \{\bar{Y}\}_{r,n+1}^l - \sum_{s=1}^{r-1} \alpha_{l,n+1}^s \{\tilde{Y}\}_{s,n}^l, \quad (2.18)$$

де

$$\alpha_{l,n+1}^s = \sum_{m=l_0}^L \{\tilde{Y}\}_{s,n}^{lT} [M]_{lm} \{\bar{Y}\}_{r,n+1}^m,$$

або у векторному вигляді:

$$[Y]_{n+1} = [\bar{Y}]_{n+1} [R]_{n+1}, \quad (2.19)$$

де  $[R]_{n+1}$  - верхня трикутна матриця.

Припускаючи, що початкові амплітудні вектори з  $[\tilde{Y}]_n$  не ортогональні до розшукуваного набору власних форм, при завершенні ітераційного циклу отримаємо:

$$[Y]_{n+1} \rightarrow [\Phi], \quad [R]_{n+1} \rightarrow [\Lambda]. \quad (2.20)$$



Для виконання умов ортогональності (2.11) нормуємо набір амплітудних векторів  $[\tilde{Y}]_{n+1}$  у розумінні приведення їх довжин до одиниці з ваговою матрицею  $[M]$ :

$$[\tilde{Y}]_{n+1} = \frac{[Y]_{n+1}}{([Y]_{n+1}^T [M] [Y]_{n+1})^{1/2}}. \quad (2.21)$$

На кожній  $n$ -ій ітерації із співвідношення Релея обчислюємо наближення до власних чисел:

$$[\Lambda]_{n+1} = \frac{[\tilde{Y}]_{n+1}^T [K] [\tilde{Y}]_n}{[\tilde{Y}]_{n+1}^T [M] [\tilde{Y}]_{n+1}}. \quad (2.22)$$

Збіжність ітераційного процесу перевіряється за допомогою:

$$\frac{|\lambda_{r,n+1} - \lambda_{r,n}|}{\lambda_{r,n+1}} \leq \varepsilon, \quad \left\| \sum_{l=l_0}^L \{\Delta \bar{Y}\}_{r,n}^l \right\| \leq \varepsilon \left\| \sum_{l=l_0}^L \{\Delta \bar{Y}\}_r^l \right\| \quad (2.23)$$

Похибка  $\varepsilon$  повинна бути менше або рівною  $10^{-2s}$ , якщо власні значення  $[\Lambda]$  потрібно обчислити з точністю до  $2s$  цифр. Власний вектор тоді буде мати  $s$  або більше вірних цифр.

Основним кроком методу зворотних ітерацій у підпросторі є розв'язання системи рівнянь (2.17) для визначення амплітудної  $[\bar{Y}]_{n+1}$ , більш близької до власних векторів у порівнянні з попереднім наближенням  $[\tilde{Y}]_n$ .

Для неоднорідних тіл або при використанні для апроксимації вздовж направляючої системи майже ортогональних базисних функцій матриця  $[K]$  рівняння (2.17) має багато діагональну структуру, тому на кожній  $n$ -ій ітерації методу зворотних ітерацій для розв'язання систем лінійних рівнянь (2.17) найбільш ефективно використовувати процедуру методу блочних ітерацій з верхньою релаксацією. Розмір блоку методу блочної верхньої

релаксації визначається амплітудними підматрицями жорсткості та мас. Тоді процес розв'язання набуває вигляду:

$$\{\bar{Y}\}_{r,n+1}^{l,i+1} = \{\bar{Y}\}_{r,n+1}^{l,i} + \omega [K]_{ll}^{-1} (\{Q\}_{r,n}^l + \{R\}_{r,n+1}^{l,i}), \quad (2.24)$$

де  $\{R\}_{r,n+1}^{l,i}$  - вектор вузлових амплітудних реакцій на ітерації  $i$ , який визначається співвідношенням:

$$\{R\}_{r,n+1}^{l,i} = \sum_{m=l_0}^{l-1} [K]_{lm} \{\bar{Y}\}_{r,n+1}^{m,i+1} + \sum_{m=l}^L [K]_{lm} \{\bar{Y}\}_{r,n+1}^{m,i}. \quad (2.25)$$

Ітераційний процес закінчується на ітерації  $l=i$ , якщо виконується умова:

$$\left\| \sum_{l=l_0}^L \{\Delta \bar{Y}\}_{r,n+1}^{l,i} \right\| \leq \varepsilon \left\| \sum_{l=l_0}^L \{\bar{Y}\}_{r,n+1}^l \right\|, \quad (2.26)$$

де  $\{\Delta \bar{Y}\}_{r,n+1}^{l,i}$  - прирощення амплітудних невідомих на ітерації  $i$ ,  $\{\Delta \bar{Y}\}_{r,n+1}^l = \sum_{i=1}^l \{\Delta \bar{Y}\}_{r,n+1}^{l,i}$  - вектор прирощень амплітудних невідомих,  $\|\{\Delta \bar{Y}\}\| = \|\{\Delta \bar{Y}\}\|^2$ ,  $\varepsilon$  - наперед задане мале додатне число, що визначає точність розв'язання системи рівнянь.

У загальному випадку ітераційні процеси будуються послідовно. Сумарна кількість ітерацій відповідає добутку кількості ітерацій на двох ітераційних циклах.

В даній роботі пропонується підхід що ґрунтується на можливості одночасного проведення ітераційних процедур методу зворотних ітерацій та ітераційного процесу, що викликаний наявністю задіагональних членів матриць мас та жорсткості. Для одного блоку методу блочної верхньої релаксації, (2.17) можна записати як:

$$\sum_{m=l_0}^L [K]_{lm} \{\bar{Y}\}_{r,k+1}^m = \{Q\}_{r,k}^l, \quad \{Q\}_{r,k}^l = \sum_{m=l_0}^L [M]_{lm} \{\tilde{Y}\}_{r,k}^m. \quad (2.27)$$

Ітераційний процес подається у вигляді:

$$\{\bar{Y}\}_{r,k+1}^l = \{\bar{Y}\}_{r,k}^l + \omega [K]_{ll}^{-1} (\{Q\}_{r,k}^l + \{R\}_{r,k}^l), \quad (2.28)$$

де

$$\{R\}_{r,k}^l = \sum_{m=l_0}^{l-1} [K]_{lm} \{\bar{Y}\}_{r,k+1}^m + \sum_{m=l}^L [K]_{lm} \{\bar{Y}\}_{r,k}^m. \quad (2.29)$$

Процедура ортогоналізації має вигляд:

$$\{Y\}_{r,k+1}^l = \{\bar{Y}\}_{r,k+1}^l - \sum_{s=1}^{r-1} \alpha_{l,k+1}^s \{\tilde{Y}\}_{s,k}^l, \quad (2.30)$$

де

$$\alpha_{l,k+1}^s = \sum_{m=l_0}^L \{\tilde{Y}\}_{s,k}^{lT} [M]_{lm} \{\bar{Y}\}_{r,k+1}^m.$$

Ітераційний процес закінчується на ітерації  $K=k$ , якщо виконуються умови:

$$\frac{|\lambda_{r,k+1} - \lambda_{r,k}|}{\lambda_{r,k+1}} \leq 10^{-2s} \quad \text{та} \quad \left\| \sum_{l=l_0}^L \{\Delta \bar{Y}\}_{r,k}^l \right\| \leq \varepsilon \left\| \sum_{l=l_0}^L \{\Delta \bar{Y}\}_r^l \right\|, \quad (2.31)$$

де  $\{\Delta \bar{Y}\}_{r,k}^l$  - прирощення амплітудних невідомих на ітерації  $k$ ,  $\{\Delta \bar{Y}\}_r^l = \sum_{k=1}^K \{\Delta \bar{Y}\}_{r,k}^l$  -

вектор прирощень амплітудних невідомих,  $\|\{\Delta \bar{Y}\}\| = \|\{\Delta \bar{Y}\}\|^2$ ,  $\varepsilon$  - наперед задане мале додатне число, що визначає точність розв'язання системи рівнянь.

Власні значення та нормований вектор властих форм обчислюємо за формулами:

$$[\Lambda]_{k+1} = \frac{\sum_{m=l_0}^L \{\bar{Y}\}_{r,k+1}^{IT} [K]_{lm} \{\bar{Y}\}_{r,k}^m}{\sum_{m=l_0}^L \{\bar{Y}\}_{r,k+1}^{IT} [M]_{lm} \{\bar{Y}\}_{r,k+1}^m} \quad (2.32)$$

$$\{\bar{Y}\}_{r,k+1}^I = \frac{\{Y\}_{r,k+1}^I}{\left( \sum_{m=l_0}^L \{Y\}_{r,k+1}^{IT} [M]_{lm} \{Y\}_{r,k+1}^m \right)^{1/2}} \quad (2.33)$$

Для прискорення ітераційного процесу існують апіорні оцінки вибору кількості утриманих власних форм і частот. Наприклад в роботі [9] пропонується вибір  $\Omega = \min\{2P, P+8\}$ , де  $P$  - необхідна кількість власних форм та частот, що повинні бути визначені з достатньою точністю, [10] пропонує підхід  $\Omega = 4P/3$ . Проведені дослідження показали, що для задач  $\Omega < 10-15$  ефективніше використовувати перший підхід, але при збільшенні частотного спектру значно зростає та стає переважною ефективність другого підходу.

### 3. Обґрунтування достовірності і порівняння збіжності рішень МСЕ і НМСЕ для неоднорідних в круговому напрямку тіл обертання

#### 3.1. Вільні коливання циліндричної оболонки

Визначено форми і частоти власних коливань циліндричної оболонки, затисненої по торцях. Радіус середньої поверхні оболонки  $R_{cp} = 7,6 \cdot 10^{-2}$  м, висота  $l = 0,305$  м товщина стінки  $h = 2,5 \cdot 10^{-4}$  м. Модуль пружності матеріалу  $E = 1,96 \cdot 10^{11}$  Па, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ , щільність  $\rho = 7,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

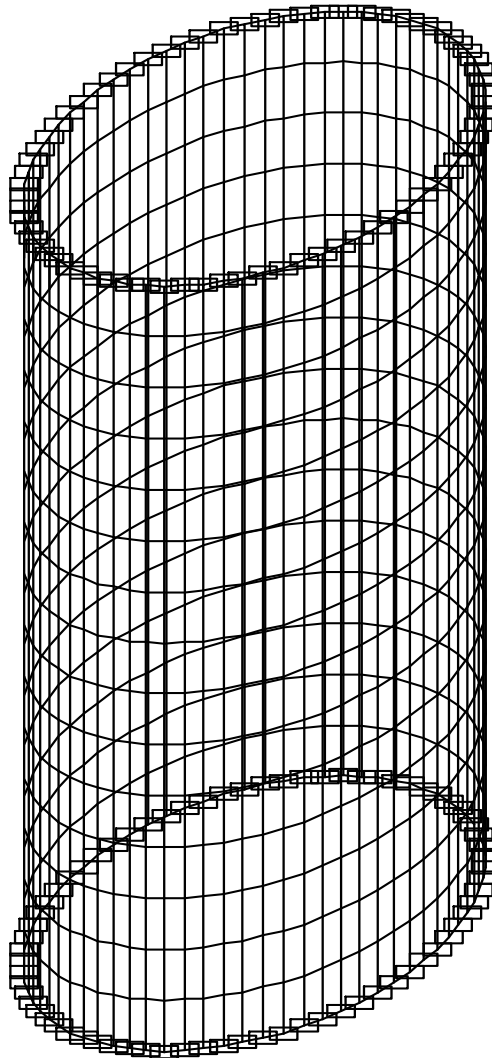


Рис. 3.1. Розрахункова схема циліндричної оболонки

## Результати розрахунків

Табл. 3.1. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 72$ ;  $h_{el} = 10$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	3,046e-004	3282,774	522,735	0,002
2	2	3,046e-004	3282,609	522,708	0,002
2	3	2,794e-004	3578,891	569,887	0,002
2	4	2,794e-004	3578,898	569,888	0,002
2	5	2,793e-004	3580,514	570,146	0,002
2	6	2,793e-004	3580,597	570,159	0,002
2	7	2,341e-004	4272,416	680,321	0,001
2	8	2,34e-004	4273,504	680,494	0,001
2	9	2,136e-004	4682,294	745,588	0,001
2	10	2,136e-004	4682,434	745,61	0,001
2	11	1,916e-004	5220,495	831,289	0,001
2	12	1,906e-004	5245,987	835,348	0,001

Табл. 3.2. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 72$ ;  $h_{el} = 15$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	3,127e-004	3198,059	509,245	0,002
2	2	3,127e-004	3197,913	509,222	0,002
2	3	2,875e-004	3478,687	553,931	0,002
2	4	2,875e-004	3478,711	553,935	0,002
2	5	2,842e-004	3518,784	560,316	0,002
2	6	2,842e-004	3518,79	560,317	0,002
2	7	2,364e-004	4230,58	673,659	0,001
2	8	2,364e-004	4230,718	673,681	0,001
2	9	2,183e-004	4581,862	729,596	0,001
2	10	2,183e-004	4581,735	729,576	0,001
2	11	1,924e-004	5197,67	827,655	0,001
2	12	1,923e-004	5199,702	827,978	0,001

Табл. 3.3. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 72$ ;  $h_{el} = 20$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	3,157e-004	3167,533	504,384	0,002
2	2	3,157e-004	3167,707	504,412	0,002
2	3	2,905e-004	3442,358	548,146	0,002
2	4	2,905e-004	3442,343	548,144	0,002
2	5	2,86e-004	3496,91	556,833	0,002
2	6	2,86e-004	3497,07	556,858	0,002
2	7	2,372e-004	4216,305	671,386	0,001
2	8	2,372e-004	4215,794	671,305	0,001
2	9	2,2e-004	4545,104	723,743	0,001
2	10	2,2e-004	4545,284	723,771	0,001
2	11	1,927e-004	5188,682	826,223	0,001
2	12	1,927e-004	5189,727	826,39	0,001

Табл. 3.4. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 72$ ;  $h_{el} = 25$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	3,171e-004	3153,29	502,116	0,002
2	2	3,171e-004	3153,3	502,118	0,002
2	3	2,919e-004	3425,246	545,421	0,002
2	4	2,919e-004	3425,254	545,423	0,002
2	5	2,868e-004	3486,789	555,221	0,002
2	6	2,868e-004	3486,658	555,2	0,002
2	7	2,376e-004	4208,813	670,193	0,001
2	8	2,376e-004	4208,869	670,202	0,001
2	9	2,209e-004	4527,658	720,965	0,001
2	10	2,208e-004	4528,463	721,093	0,001
2	11	1,931e-004	5179,394	824,744	0,001
2	12	1,93e-004	5182,169	825,186	0,001

Табл. 3.5. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 72$ ;  $h_{el} = 30$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	3,179e-004	3145,655	500,901	0,002
2	2	3,179e-004	3145,612	500,894	0,002
2	3	2,927e-004	3416,011	543,951	0,002
2	4	2,927e-004	3416,065	543,959	0,002
2	5	2,873e-004	3481,173	554,327	0,002
2	6	2,873e-004	3481,139	554,321	0,002
2	7	2,378e-004	4204,974	669,582	0,001
2	8	2,378e-004	4204,957	669,579	0,001
2	9	2,213e-004	4518,32	719,478	0,001
2	10	2,213e-004	4518,371	719,486	0,001
2	11	1,93e-004	5181,025	825,004	0,001
2	12	1,933e-004	5174,573	823,977	0,001

Табл. 3.6. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 72$ ;  $h_{el} = 35$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	3,184e-004	3141,071	500,171	0,002
2	2	3,184e-004	3141,085	500,173	0,002
2	3	2,932e-004	3410,652	543,097	0,002
2	4	2,932e-004	3410,656	543,098	0,002
2	5	2,875e-004	3477,849	553,798	0,002
2	6	2,875e-004	3477,881	553,803	0,002
2	7	2,379e-004	4202,946	669,259	0,001
2	8	2,379e-004	4203,483	669,344	0,001
2	9	2,216e-004	4513,041	718,637	0,001
2	10	2,216e-004	4513,111	718,648	0,001
2	11	1,928e-004	5186,93	825,944	0,001
2	12	1,933e-004	5174,391	823,948	0,001

Табл. 3.7. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 72$ ;  $h_{el} = 40$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	3,186e-004	3138,255	499,722	0,002
2	2	3,187e-004	3138,203	499,714	0,002
2	3	2,935e-004	3407,24	542,554	0,002
2	4	2,935e-004	3407,271	542,559	0,002
2	5	2,877e-004	3475,825	553,475	0,002
2	6	2,877e-004	3475,956	553,496	0,002
2	7	2,38e-004	4201,311	668,999	0,001
2	8	2,38e-004	4201,395	669,012	0,001
2	9	2,217e-004	4509,693	718,104	0,001
2	10	2,217e-004	4509,822	718,124	0,001
2	11	1,931e-004	5178,834	824,655	0,001
2	12	1,93e-004	5180,589	824,935	0,001

Похибку вимірювань обчислюємо за емпіричною формулою:

$$\psi = \frac{\omega_i - \omega_{et}}{\omega_{et}} \cdot 100\%, \quad (3.1)$$

де  $\omega_i$  - результат і-го вимірювання;  $\omega_{et}$  - значення вимірювань, що прийняте за еталон.

Похибка отриманих результатів

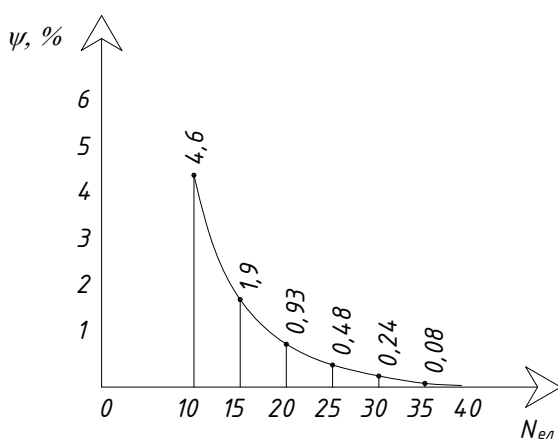


Рис. 3.2. 1-й період коливань

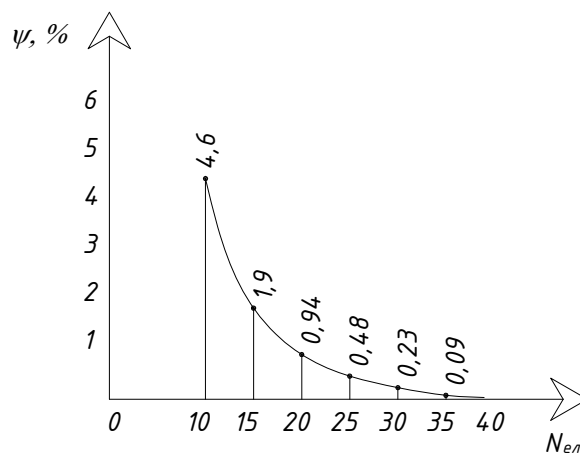


Рис. 3.3. 2-й період коливань



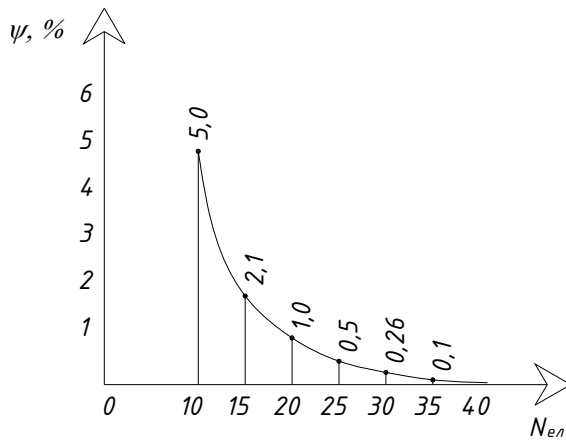


Рис. 3.4. 3-й період коливань

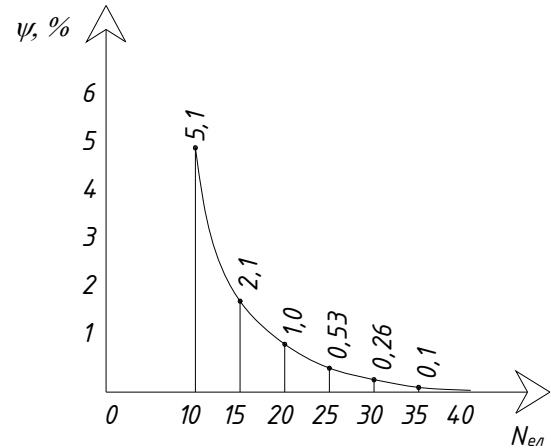


Рис. 3.5. 4-й період коливань

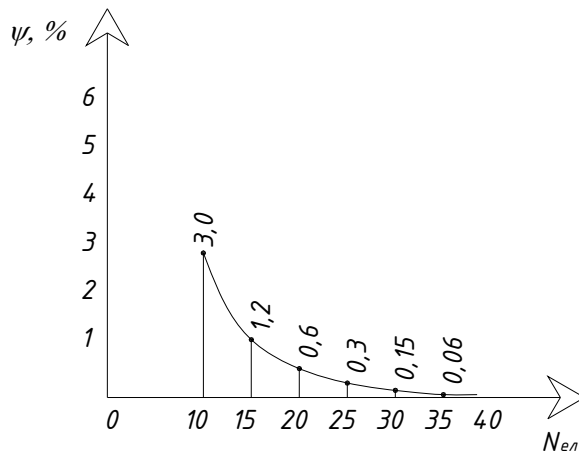


Рис. 3.6. 5-й період коливань

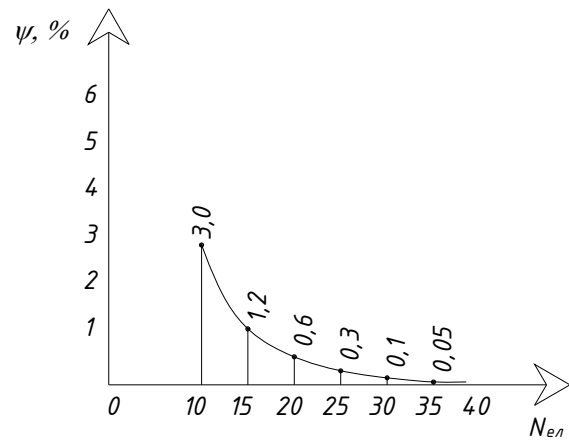


Рис. 3.7. 6-й період коливань

За отриманими результатами розрахунків можна зробити висновок, що після розбиття розрахункової схеми по висоті на 20 СЕ, ми отримуємо точність розрахунків з відносною похибкою  $\leq 1\%$ . Виконуємо розрахунок циліндричної оболонки змінюючи кількість СЕ по радіусу обертання, а по висоті кількість СЕ приймаємо сталою  $h_{ел} = 20$ .

## Результати розрахунків

Табл. 3.8. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 20$ ;  $h_{el} = 20$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	3.066e-004	3261.111	519.285	0.002
2	2	3.066e-004	3261.064	519.278	0.002
2	3	2.849e-004	3509.431	558.827	0.002
2	4	2.849e-004	3510.13	558.938	0.002
2	5	2.812e-004	3556.136	566.264	0.002
2	6	2.812e-004	3556.169	566.269	0.002
2	7	2.498e-004	4004.002	637.58	0.002
2	8	2.499e-004	4002.138	637.283	0.002
2	9	2.244e-004	4457.119	709.732	0.001
2	10	2.244e-004	4455.427	709.463	0.001
2	11	2.156e-004	4638.928	738.683	0.001
2	12	2.143e-004	4665.371	742.893	0.001
2	13	2.143e-004	4665.373	742.894	0.001

Табл. 3.9. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 32$ ;  $h_{el} = 20$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	3.125e-004	3199.997	509.554	0.002
2	2	3.125e-004	3199.989	509.552	0.002
2	3	2.875e-004	3478.203	553.854	0.002
2	4	2.875e-004	3478.225	553.858	0.002
2	5	2.839e-004	3522.748	560.947	0.002
2	6	2.839e-004	3522.71	560.941	0.002
2	7	2.366e-004	4226.41	672.995	0.001
2	8	2.366e-004	4226.515	673.012	0.001
2	9	2.181e-004	4584.412	730.002	0.001
2	10	2.181e-004	4584.863	730.074	0.001
2	11	1.938e-004	5161.01	821.817	0.001
2	12	1.937e-004	5163.15	822.158	0.001

Табл. 3.10. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 42$ ;  $h_{el} = 20$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	3.142e-004	3182.928	506.836	0.002
2	2	3.142e-004	3182.995	506.846	0.002
2	3	2.891e-004	3459.111	550.814	0.002
2	4	2.891e-004	3459.116	550.815	0.002
2	5	2.848e-004	3510.648	559.02	0.002
2	6	2.848e-004	3510.728	559.033	0.002
2	7	2.366e-004	4226.671	673.037	0.001
2	8	2.366e-004	4226.625	673.029	0.001
2	9	2.191e-004	4563.552	726.68	0.001
2	10	2.191e-004	4563.728	726.708	0.001
2	11	1.927e-004	5188.565	826.205	0.001
2	12	1.928e-004	5185.984	825.794	0.001

Табл. 3.11. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 52$ ;  $h_{el} = 20$ )

Периоды колебаний					
Загруженюие	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	3.15e-004	3174.73	505.53	0.002
2	2	3.15e-004	3174.785	505.539	0.002
2	3	2.898e-004	3450.167	549.39	0.002
2	4	2.898e-004	3450.224	549.399	0.002
2	5	2.854e-004	3503.706	557.915	0.002
2	6	2.854e-004	3503.618	557.901	0.002
2	7	2.368e-004	4222.494	672.372	0.001
2	8	2.369e-004	4221.656	672.238	0.001
2	9	2.196e-004	4553.659	725.105	0.001
2	10	2.196e-004	4553.871	725.139	0.001
2	11	1.925e-004	5195.952	827.381	0.001
2	12	1.923e-004	5199.449	827.938	0.001

Табл. 3.12. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 62$ ;  $h_{el} = 20$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	3.154e-004	3170.262	504.819	0.002
2	2	3.154e-004	3170.213	504.811	0.002
2	3	2.903e-004	3445.232	548.604	0.002
2	4	2.903e-004	3445.28	548.611	0.002
2	5	2.858e-004	3499.451	557.237	0.002
2	6	2.857e-004	3499.615	557.264	0.002
2	7	2.371e-004	4218.37	671.715	0.001
2	8	2.371e-004	4218.188	671.686	0.001
2	9	2.199e-004	4548.211	724.237	0.001
2	10	2.199e-004	4548.463	724.278	0.001
2	11	1.925e-004	5195.182	827.258	0.001
2	12	1.919e-004	5211.561	829.866	0.001

Табл. 3.13. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 72$ ;  $h_{el} = 20$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	3.157e-004	3167.533	504.384	0.002
2	2	3.157e-004	3167.707	504.412	0.002
2	3	2.905e-004	3442.358	548.146	0.002
2	4	2.905e-004	3442.343	548.144	0.002
2	5	2.86e-004	3496.91	556.833	0.002
2	6	2.86e-004	3497.07	556.858	0.002
2	7	2.372e-004	4216.305	671.386	0.001
2	8	2.372e-004	4215.794	671.305	0.001
2	9	2.2e-004	4545.104	723.743	0.001
2	10	2.2e-004	4545.284	723.771	0.001
2	11	1.927e-004	5188.682	826.223	0.001
2	12	1.927e-004	5189.727	826.39	0.001

## Похибка отриманих результатів

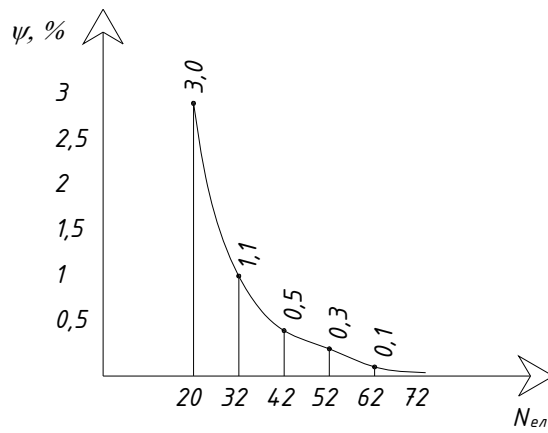


Рис. 3.8. 1-й період коливань

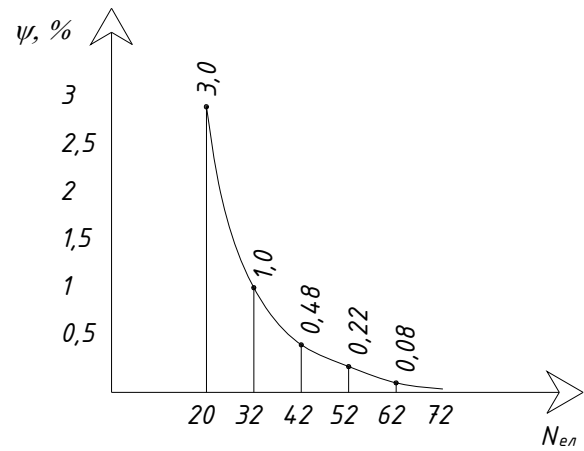


Рис. 3.9. 2-й період коливань

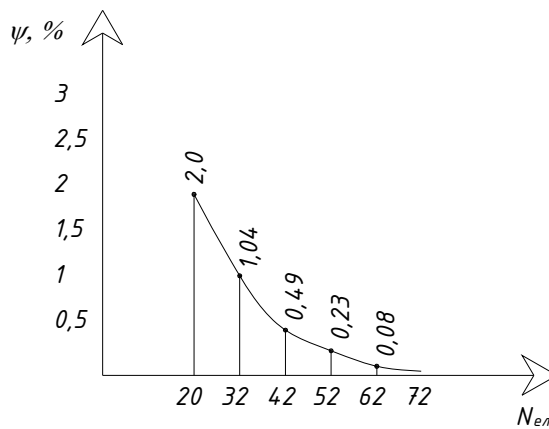


Рис. 3.10. 3-й період коливань

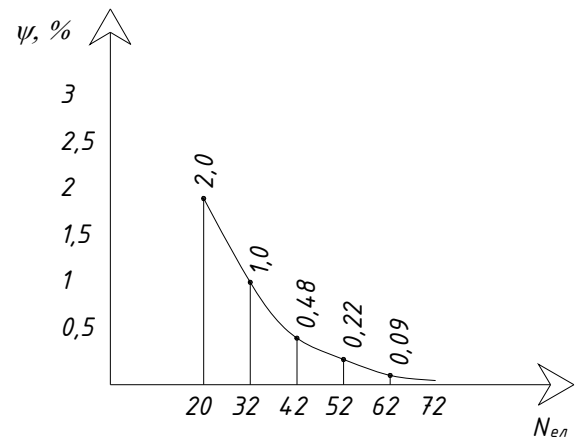


Рис. 3.11. 4-й період коливань

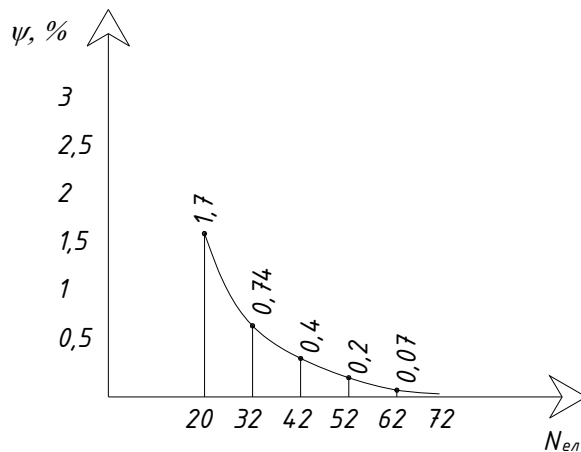


Рис. 3.12. 5-й період коливань

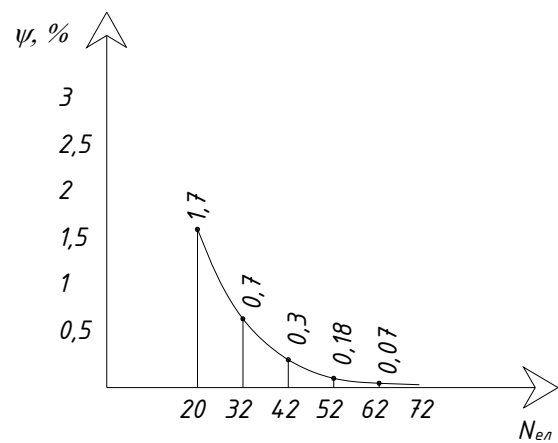
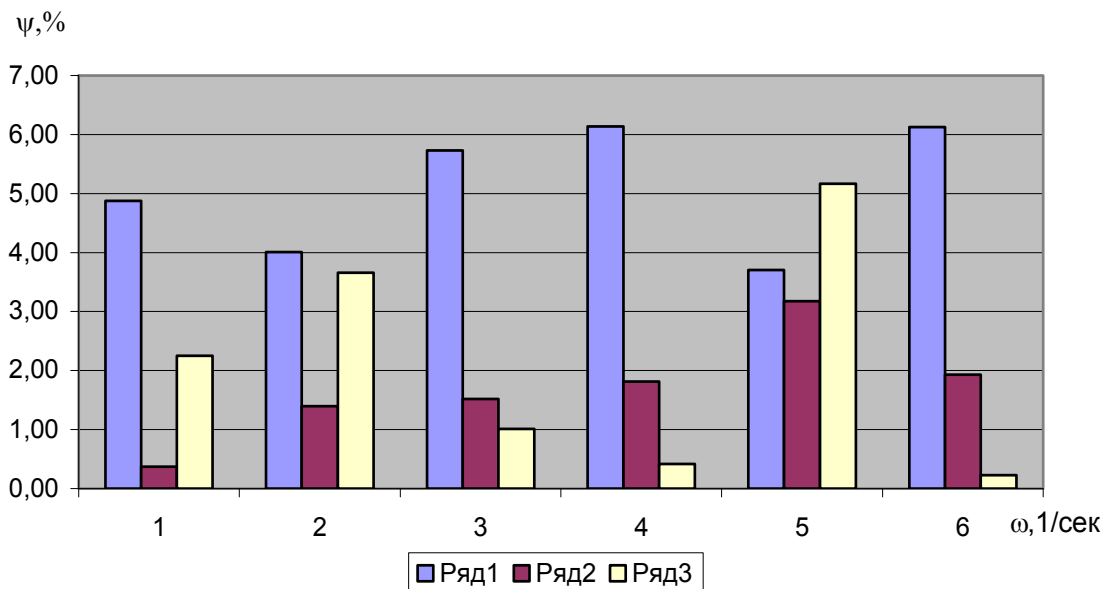


Рис. 3.13. 6-й період коливань

За отриманими результатами розрахунків можна зробити висновок, що після розбиття розрахункової схеми по радіусу обертання на 42 СЕ, ми отримуємо точність розрахунків з відносною похибкою  $\leq 0,5\%$ .

Табл. 3.14. Порівняння отриманих результатів з іншими чисельними рішеннями

Метод обчислення	Частота					
	1	2	3	4	5	6
Аналітичний	533	574	593	717	755	881
SCAD	507	551	559	673	727	827
HMCE	531	582	584	704	779	864
По Релею-Рітцу	545	595	599	720	794	883



Ряд 1 – SCAD; ряд 2 – HMCE; ряд 3 – по Релею-Рітцу.

## Форми власних коливань

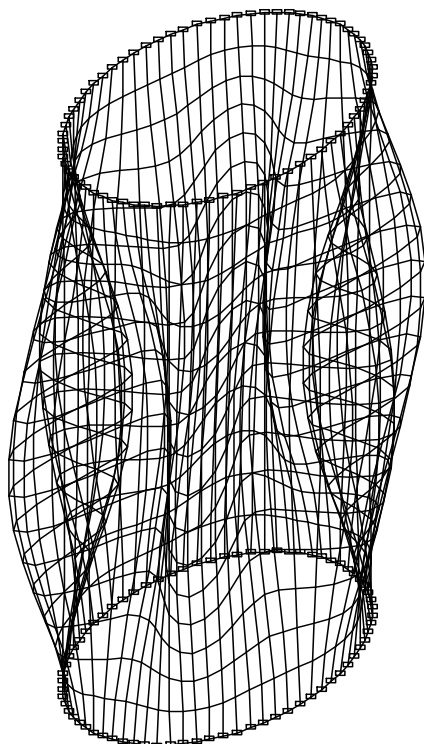


Рис. 3.14. 1-а форма  
власних коливань

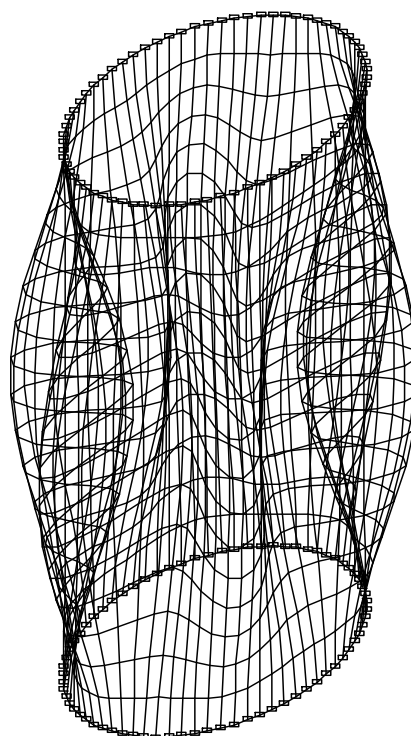


Рис. 3.15. 2-а форма  
власних коливань

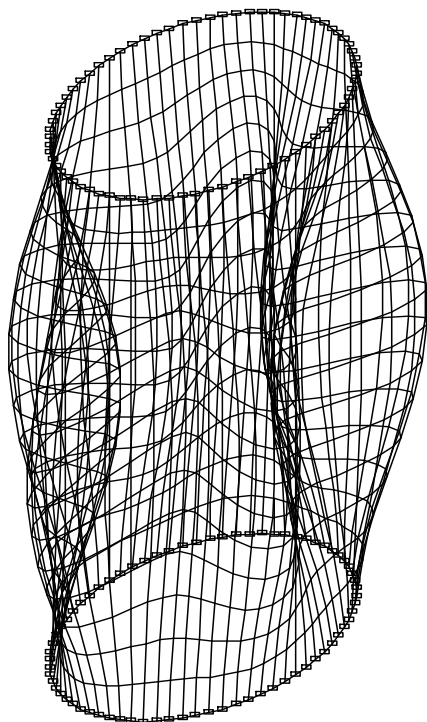


Рис. 3.16. 3-а форма  
власних коливань

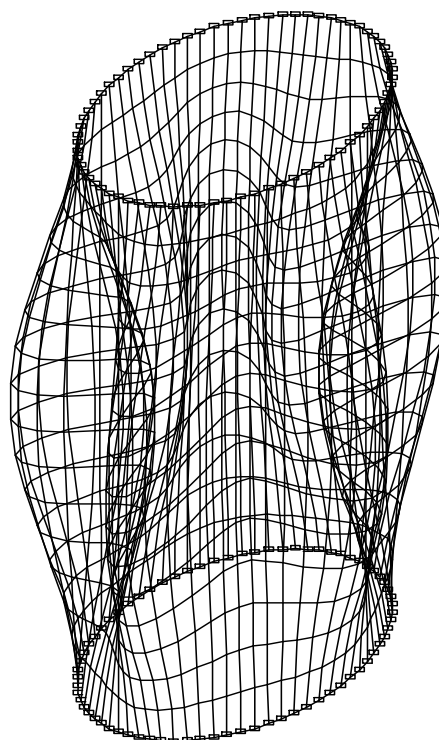


Рис. 3.17. 4-а форма  
власних коливань

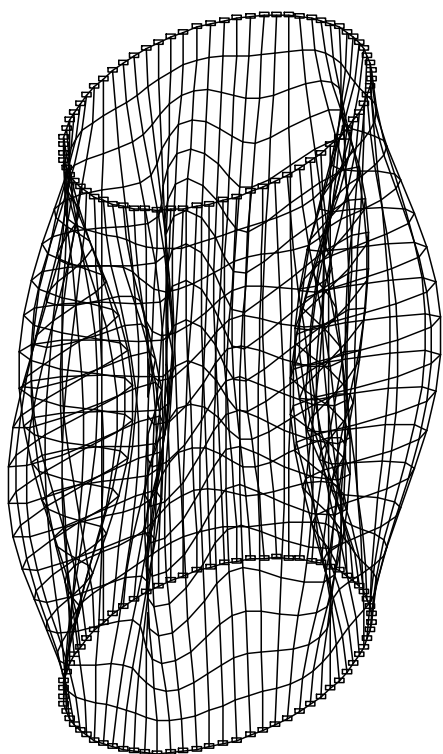


Рис. 3.18. 5-а форма

ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ

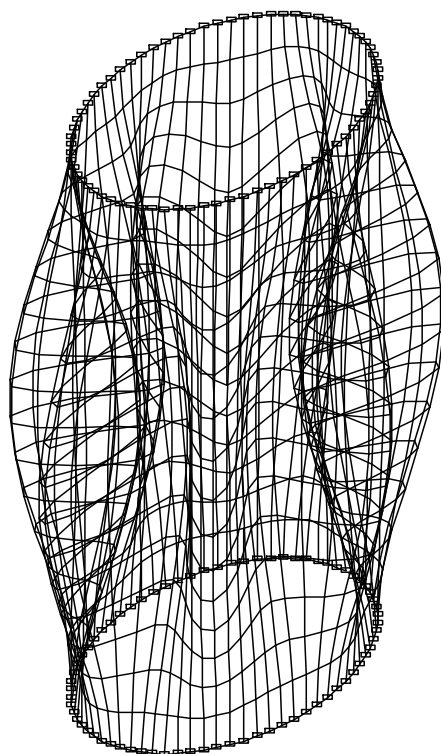


Рис. 3.19. 6-а форма

ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ

### 3.2. Вільні коливання кругової пластини

Визначено власні форми і частоти жорстко закріпленої по контуру круглої пластини постійної товщини. Радіус пластини  $r=2,5$  м, товщина  $h=0,01$  м, модуль пружності  $E=2,06 \cdot 10^{11}$  Па, коефіцієнт Пуассона  $\nu=0,3$ , щільність  $\rho=7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

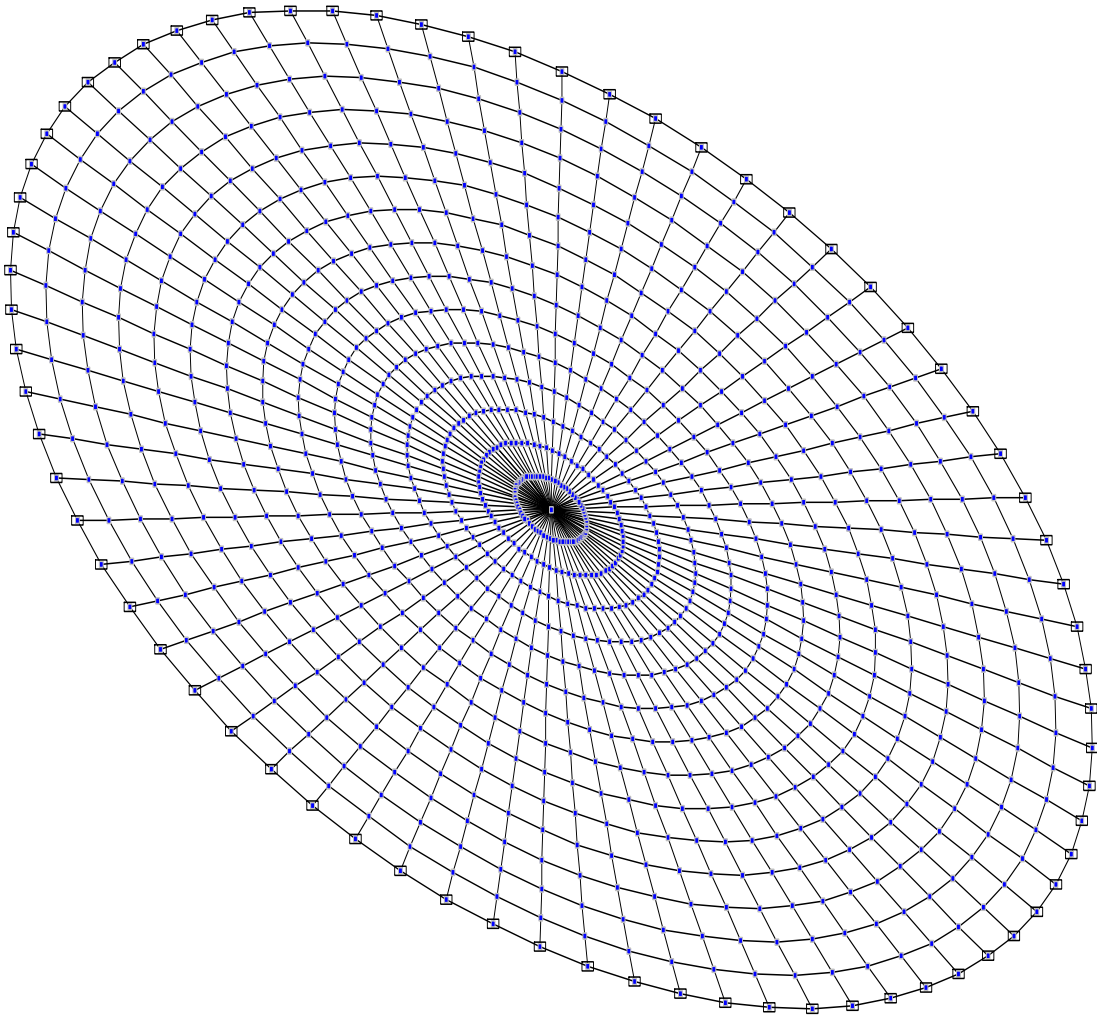


Рис. 3.20. Розрахункова схема круглої пластини



## Результати розрахунків

Табл. 3.15. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 72$ ;  $h_{el} = 3$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды
			1/С	ГЦ	
2	1	0,043	23,346	3,717	0,269
2	2	0,018	54,636	8,7	0,115
2	3	0,018	54,636	8,7	0,115
2	4	0,011	88,62	14,111	0,071
2	5	0,009	109,682	17,465	0,057
2	6	0,009	109,681	17,465	0,057
2	7	0,007	143,507	22,851	0,044
2	8	0,007	143,507	22,851	0,044
2	9	0,007	146,041	23,255	0,043
2	10	0,007	146,044	23,255	0,043
2	11	0,006	181,541	28,908	0,035
2	12	0,005	182,579	29,073	0,034
2	13	0,005	182,579	29,073	0,034

Табл. 3.16. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 72$ ;  $h_{el} = 5$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды
			1/С	ГЦ	
2	1	0,043	23,282	3,707	0,27
2	2	0,02	50,558	8,051	0,124
2	3	0,02	50,558	8,051	0,124
2	4	0,011	89,303	14,22	0,07
2	5	0,011	89,303	14,22	0,07
2	6	0,011	89,982	14,328	0,07
2	7	0,008	129,339	20,595	0,049
2	8	0,008	129,34	20,595	0,049
2	9	0,007	146,234	23,286	0,043
2	10	0,007	146,235	23,286	0,043
2	11	0,006	177,294	28,231	0,035
2	12	0,006	177,294	28,231	0,035

Табл. 3.17. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 72$ ;  $h_{el} = 10$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды
			1/С	ГЦ	
2	1	0,043	23,503	3,743	0,267
2	2	0,02	50,267	8,004	0,125
2	3	0,02	50,391	8,024	0,125
2	4	0,012	82,517	13,14	0,076
2	5	0,012	83,195	13,248	0,075
2	6	0,011	90,155	14,356	0,07
2	7	0,008	121,038	19,274	0,052
2	8	0,008	121,952	19,419	0,051
2	9	0,007	142,956	22,764	0,044
2	10	0,007	143,591	22,865	0,044
2	11	0,006	166,284	26,478	0,038
2	12	0,006	167,126	26,612	0,038

Табл. 3.18. Периоды колебаний ( $R_{el} = 72$ ;  $h_{el} = 15$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды
			1/С	ГЦ	
2	1	0,042	23,721	3,777	0,265
2	2	0,02	49,905	7,947	0,126
2	3	0,02	49,907	7,947	0,126
2	4	0,012	82,247	13,097	0,076
2	5	0,012	83,105	13,097	0,076
2	6	0,011	92,504	14,73	0,068
2	7	0,008	120,502	19,188	0,052
2	8	0,008	120,502	19,188	0,052
2	9	0,007	142,85	22,747	0,044
2	10	0,007	142,869	22,75	0,044
2	11	0,006	164,757	26,235	0,038
2	12	0,006	164,757	26,235	0,038

Табл. 3.19. Периоды колебаний ( $R_{el} = 72$ ;  $h_{el} = 20$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды
			1/С	ГЦ	
2	1	0,041	24,163	3,848	0,26
2	2	0,02	50,459	8,035	0,124
2	3	0,02	50,499	8,041	0,124
2	4	0,012	82,567	13,148	0,076
2	5	0,012	83,034	13,222	0,076
2	6	0,011	93,946	14,96	0,067
2	7	0,008	121,161	19,293	0,052
2	8	0,008	121,394	19,33	0,052
2	9	0,007	144,468	23,005	0,043
2	10	0,007	144,501	23,01	0,043
2	11	0,008	122,474	19,502	0,051
2	12	0,008	125,039	19,911	0,05
2	13	0,008	125,04	19,911	0,05

Табл. 3.20. Периоды колебаний ( $R_{el} = 72$ ;  $h_{el} = 25$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды
			1/С	ГЦ	
2	1	0,041	24,272	3,865	0,259
2	2	0,02	50,563	8,051	0,124
2	3	0,02	50,563	8,051	0,124
2	4	0,012	83,015	13,219	0,076
2	5	0,012	83,015	13,219	0,076
2	6	0,011	94,426	15,036	0,067
2	7	0,008	121,598	19,363	0,052
2	8	0,008	121,598	19,363	0,052
2	9	0,007	144,688	23,04	0,043
2	10	0,007	144,693	23,04	0,043
2	11	0,006	166,203	26,466	0,038
2	12	0,006	166,198	26,465	0,038

## Похибка отриманих результатів

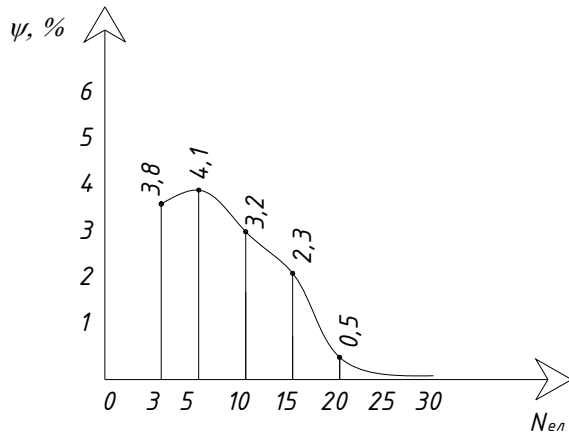


Рис. 3.21. 1-й період коливань

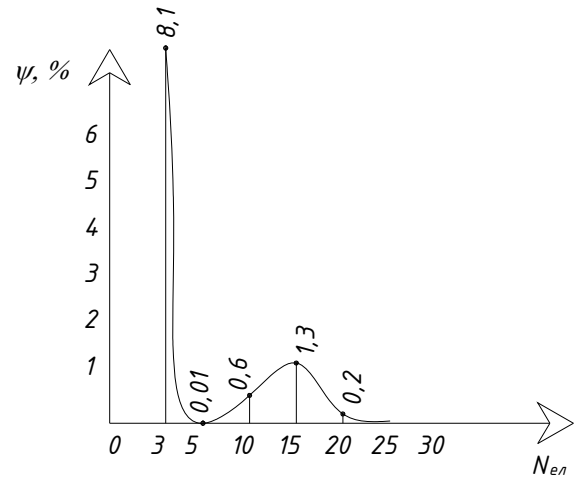


Рис. 3.22. 2-й період коливань

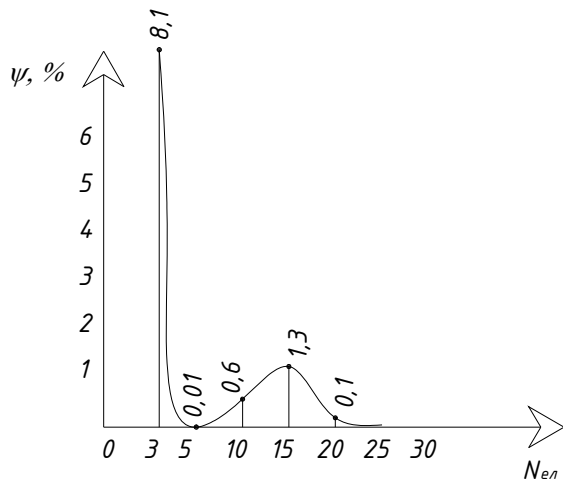


Рис. 3.23. 3-й період коливань

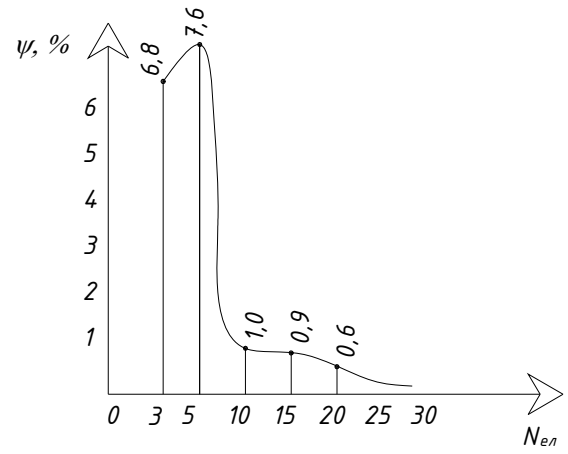


Рис. 3.24. 4-й період коливань

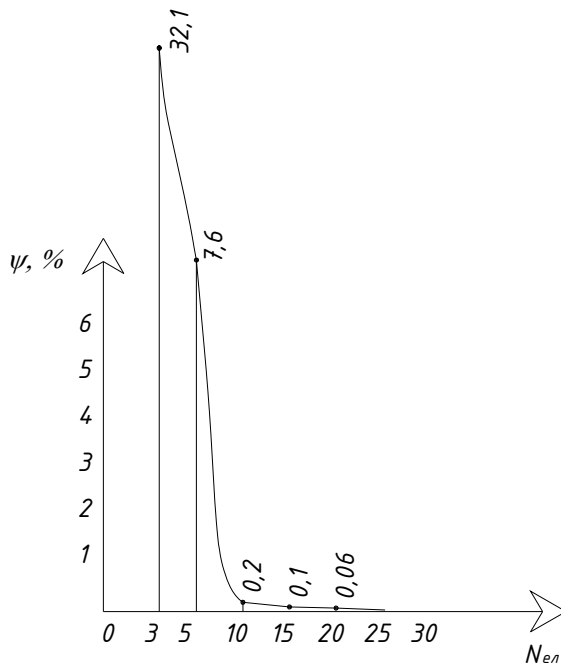


Рис. 3.25. 5-й період коливань

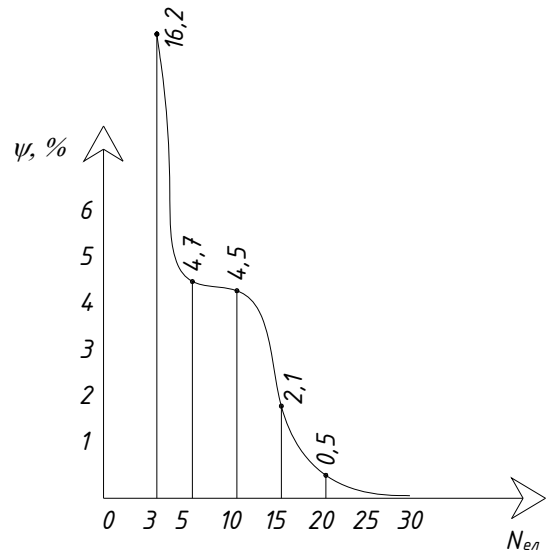


Рис. 3.26. 6-й період коливань

За отриманими результатами розрахунків можна зробити висновок, що після розбиття розрахункової схеми по радіусу на 20 СЕ, ми отримуємо точність розрахунків з відносною похибкою  $<1\%$ . Виконуємо розрахунок циліндричної оболонки змінюючи кількість СЕ по радіусу обертання, а по радіусу  $r$  кількість СЕ приймаємо сталою  $h_{ел} = 20$ .

## Результати розрахунків

Табл. 3.21. **Периоды колебаний** ( $R_{el}^{ob} = 20$ ;  $r_{el} = 20$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	0.037	26.858	4.277	0.234
2	2	0.018	54.489	8.677	0.115
2	3	0.018	55.382	8.819	0.113
2	4	0.011	91.333	14.543	0.069
2	5	0.011	92.454	14.722	0.068
2	6	0.01	101.15	16.107	0.062
2	7	0.007	138.95	22.126	0.045
2	8	0.007	140.058	22.302	0.045
2	9	0.007	153.676	24.471	0.041
2	10	0.006	155.607	24.778	0.04
2	11	0.005	195.985	31.208	0.032
2	12	0.005	197.094	31.384	0.032

Табл. 3.22. **Периоды колебаний** ( $R_{el}^{ob} = 32$ ;  $r_{el} = 20$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	0.04	24.71	3.935	0.254
2	2	0.019	51.369	8.18	0.122
2	3	0.019	51.369	8.18	0.122
2	4	0.012	84.645	13.478	0.074
2	5	0.012	84.645	13.478	0.074
2	6	0.01	95.787	15.253	0.066
2	7	0.008	124.887	19.886	0.05
2	8	0.008	124.887	19.886	0.05
2	9	0.007	146.793	23.375	0.043
2	10	0.007	146.794	23.375	0.043
2	11	0.006	172.359	27.446	0.036
2	12	0.006	172.374	27.448	0.036

Табл. 3.23. **Периоды колебаний** ( $R_{el}^{ob} = 42$ ;  $r_{el} = 20$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	0.041	24.433	3.891	0.257
2	2	0.02	50.781	8.086	0.124
2	3	0.02	50.991	8.12	0.123
2	4	0.012	83.394	13.279	0.075
2	5	0.012	83.842	13.351	0.075
2	6	0.011	94.941	15.118	0.066
2	7	0.008	122.425	19.494	0.051
2	8	0.008	123.056	19.595	0.051
2	9	0.007	145.461	23.163	0.043
2	10	0.007	145.771	23.212	0.043
2	11	0.006	167.941	26.742	0.037
2	12	0.006	168.677	26.859	0.037

Табл. 3.24. Периоды колебаний ( $R_{el}^{ob} = 52$ ;  $r_{el} = 20$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	0.041	24.334	3.875	0.258
2	2	0.02	50.701	8.073	0.124
2	3	0.02	50.701	8.073	0.124
2	4	0.012	83.293	13.263	0.075
2	5	0.012	83.293	13.263	0.075
2	6	0.011	94.617	15.066	0.066
2	7	0.008	122.123	19.446	0.051
2	8	0.008	122.124	19.446	0.051
2	9	0.007	145.09	23.104	0.043
2	10	0.007	145.092	23.104	0.043
2	11	0.006	167.122	26.612	0.038
2	12	0.006	167.124	26.612	0.038

Табл. 3.25. Периоды колебаний ( $R_{el}^{ob} = 62$ ;  $r_{el} = 20$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	0.041	24.292	3.868	0.259
2	2	0.02	50.62	8.061	0.124
2	3	0.02	50.62	8.061	0.124
2	4	0.012	83.135	13.238	0.076
2	5	0.012	83.134	13.238	0.076
2	6	0.011	94.478	15.044	0.066
2	7	0.008	121.814	19.397	0.052
2	8	0.008	121.818	19.398	0.052
2	9	0.007	144.879	23.07	0.043
2	10	0.007	144.885	23.071	0.043
2	11	0.006	166.55	26.521	0.038
2	12	0.006	166.555	26.522	0.038

Табл. 3.26. Периоды колебаний ( $R_{el}^{ob} = 72$ ;  $r_{el} = 20$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды
			1/С	Гц	
2	1	0,041	24,163	3,848	0,26
2	2	0,02	50,459	8,035	0,124
2	3	0,02	50,499	8,041	0,124
2	4	0,012	82,567	13,148	0,076
2	5	0,012	83,034	13,222	0,076
2	6	0,011	93,946	14,96	0,067
2	7	0,008	121,161	19,293	0,052
2	8	0,008	121,394	19,33	0,052
2	9	0,007	144,468	23,005	0,043
2	10	0,007	144,501	23,01	0,043
2	11	0,008	122,474	19,502	0,051
2	12	0,008	125,039	19,911	0,05
2	13	0,008	125,04	19,911	0,05

## Похибка отриманих результатів

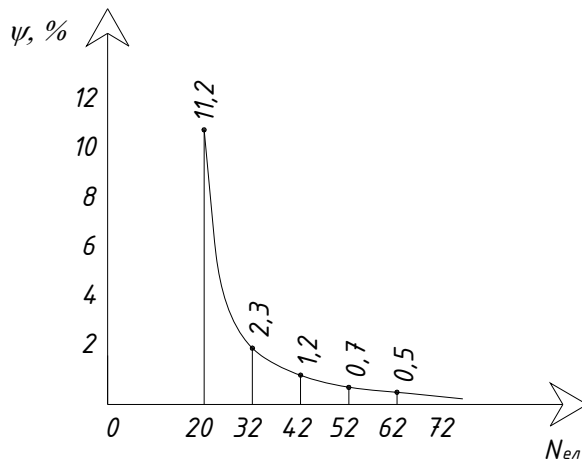


Рис. 3.27. 1-й період коливань

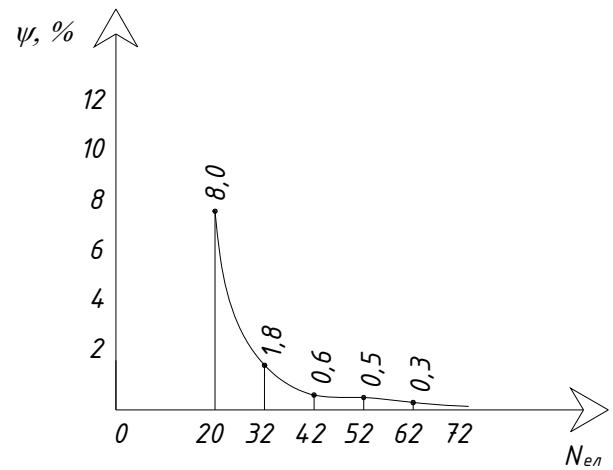


Рис. 3.28. 2-й період коливань

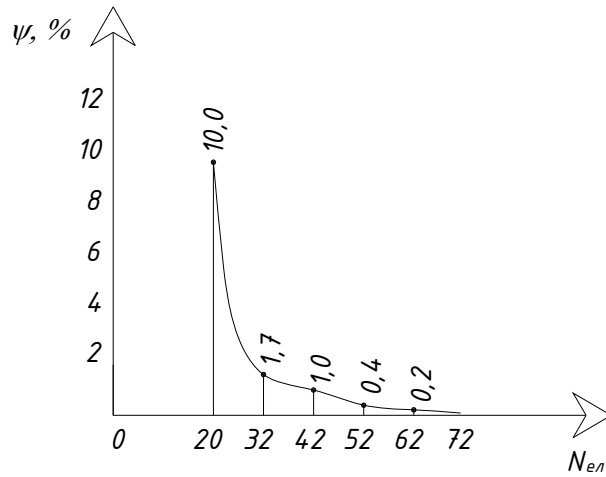


Рис. 3.29. 3-й період коливань

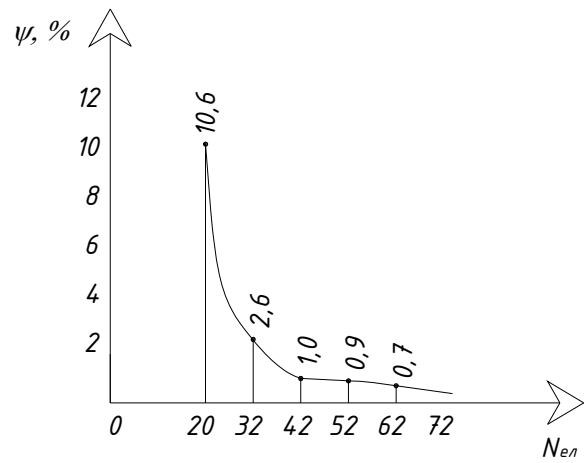


Рис. 3.30. 4-й період коливань

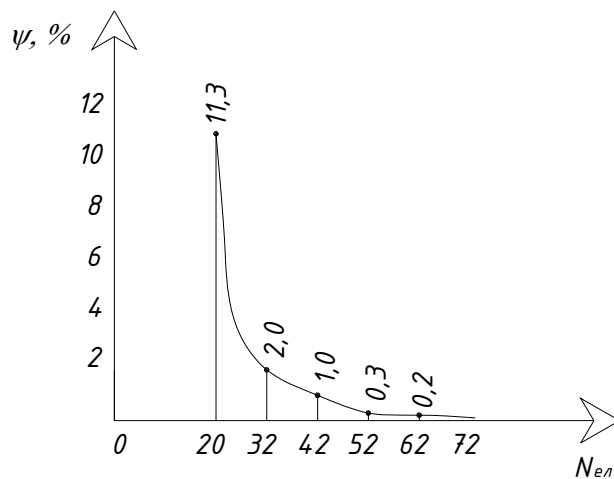


Рис. 3.31. 5-й період коливань

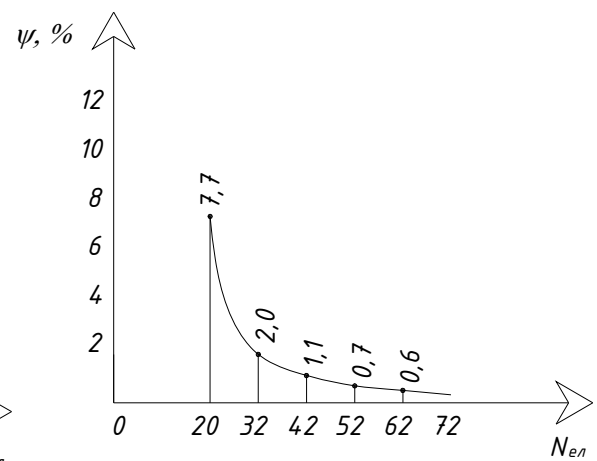
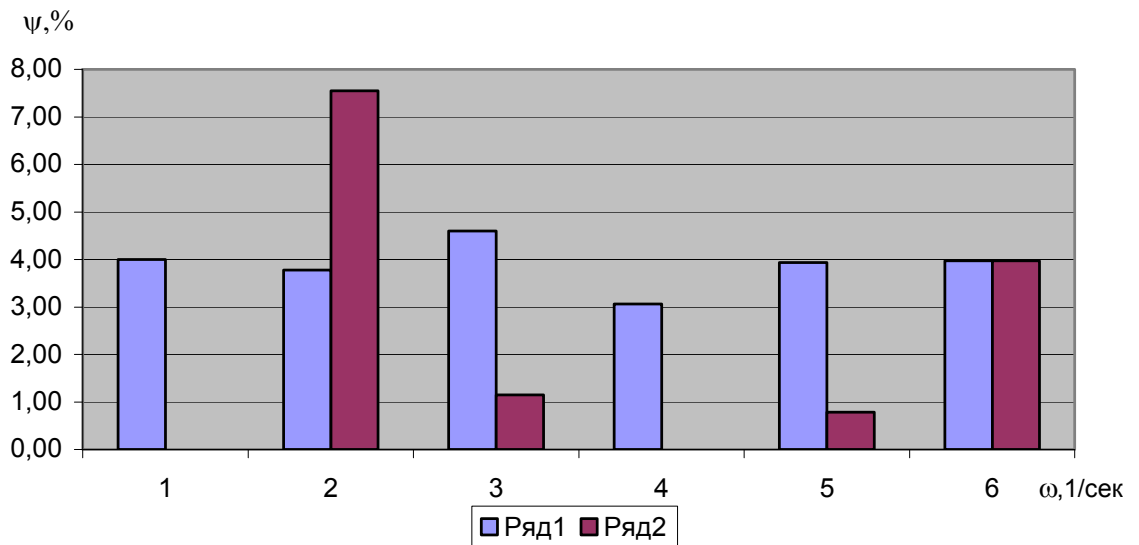


Рис. 3.32. 6-й період коливань

За отриманими результатами розрахунків можна зробити висновок, що після розбиття розрахункової схеми по радіусу обертання  $R$  на 52 СЕ, ми отримуємо точність розрахунків з відносною похибкою  $<1\%$ .

Табл. 3.27. Порівняння отриманих результатів з іншими чисельними рішеннями

Метод обчислення	Частота					
	1	2	3	4	5	6
Аналітичний	25	53	87	98	127	151
SCAD	24	51	83	95	122	145
HMCE	25	57	86	98	126	157



Ряд 1 –SCAD; ряд 2 – HMCE.



## Форми власних коливань

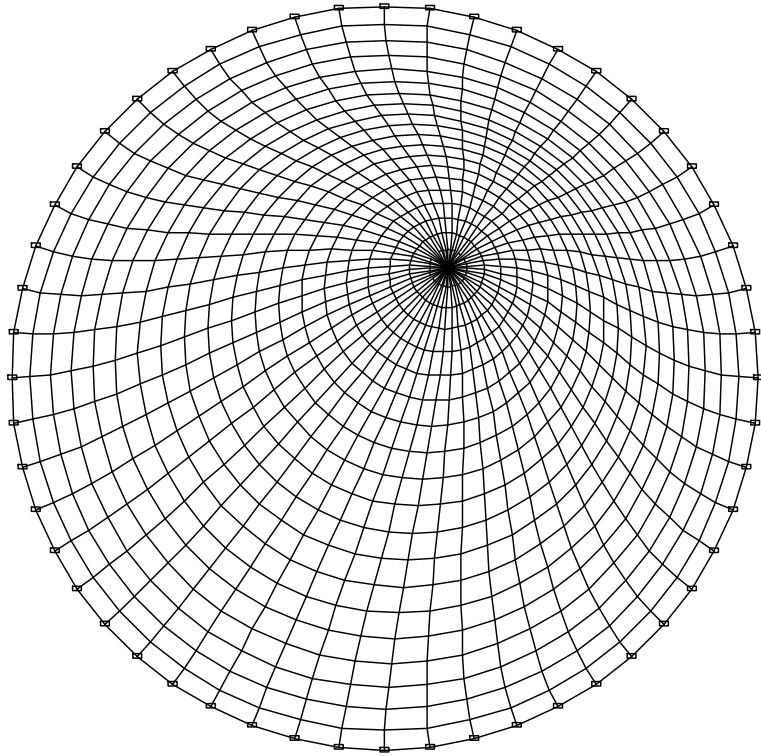


Рис. 3.33. 1-а форма власних коливань

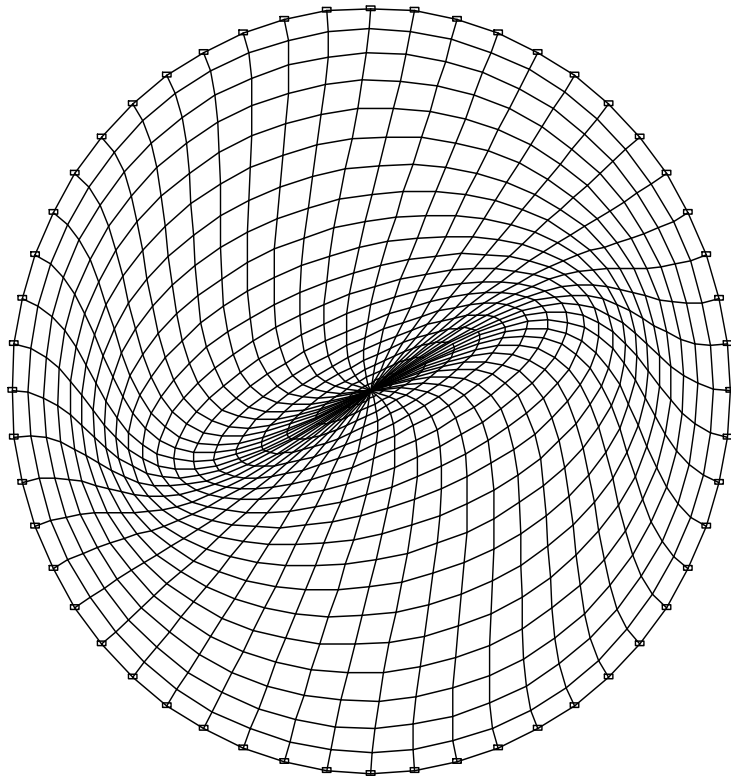


Рис. 3.34. 2-а форма власних коливань

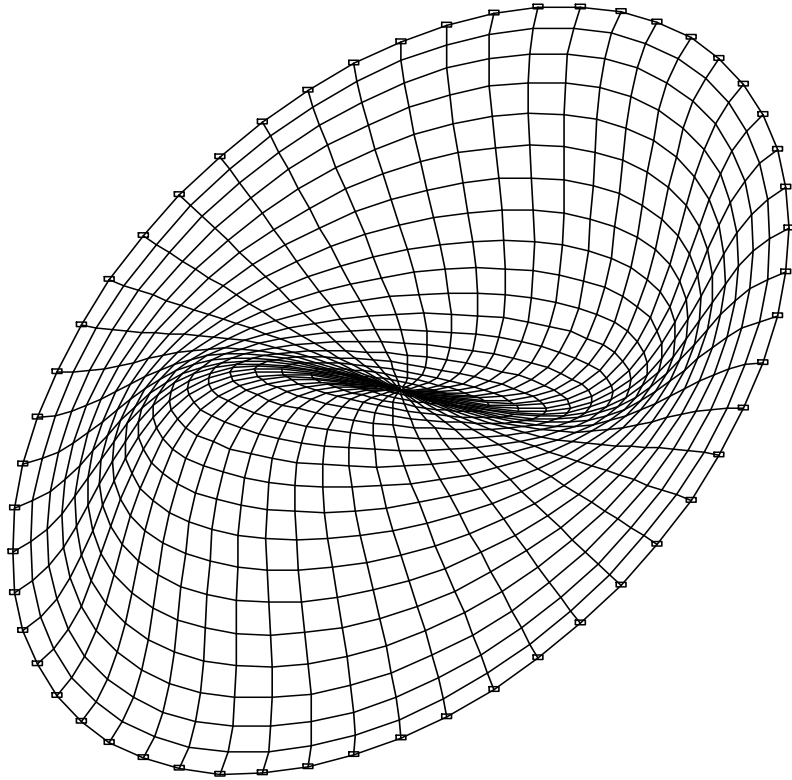


Рис. 3.35. 3-а форма власних коливань

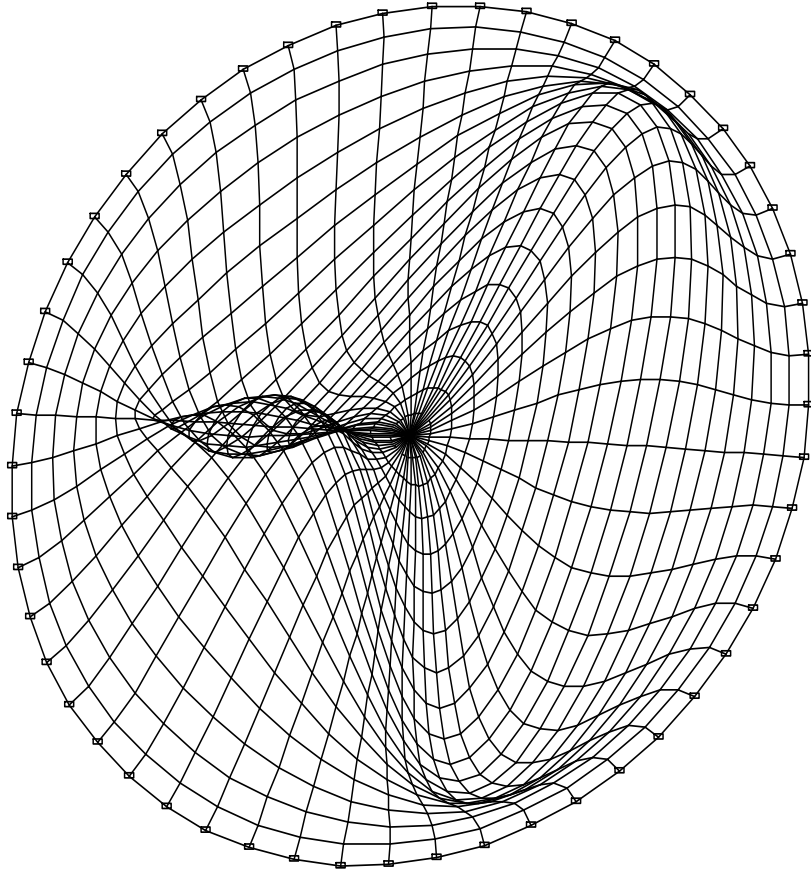


Рис. 3.36. 4-а форма власних коливань

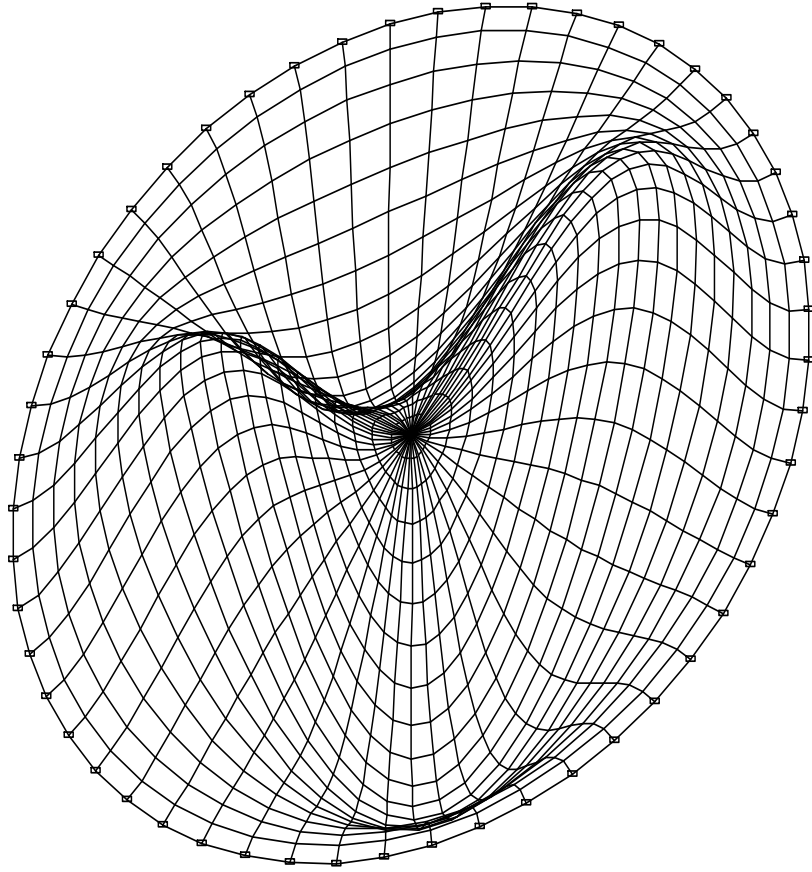


Рис. 3.37. 5-а форма власних коливань

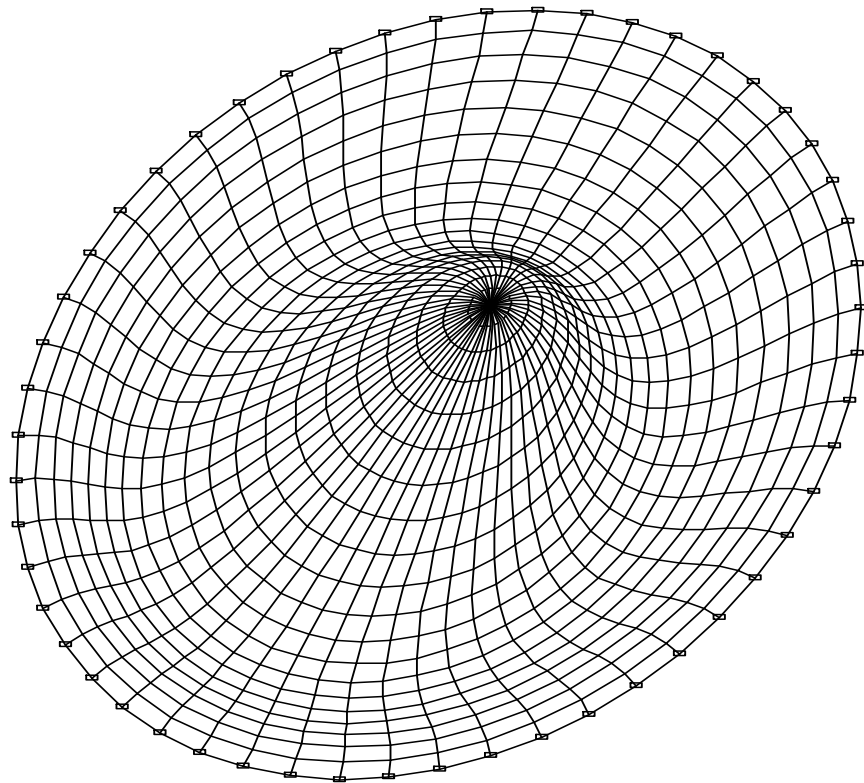


Рис. 3.38. 6-а форма власних коливань

### 3.3. Вільні коливання циліндричної оболонки з вирізом

Визначено форми і частоти власних коливань циліндричної оболонки, затисненої по торцях. Радіус середньої поверхні оболонки  $R_{cp} = 0,1191$  м, висота  $l = 0,2032$  м, товщина стінки  $h = 3,56 \cdot 10^{-3}$  м. Модуль пружності матеріалу  $E = 7,03 \cdot 10^9$  Па, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,33$ , щільність  $\rho = 2,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Виріз приймаємо  $0,1 \cdot l = 0,1 \cdot 0,2032 = 0,02032$  м.

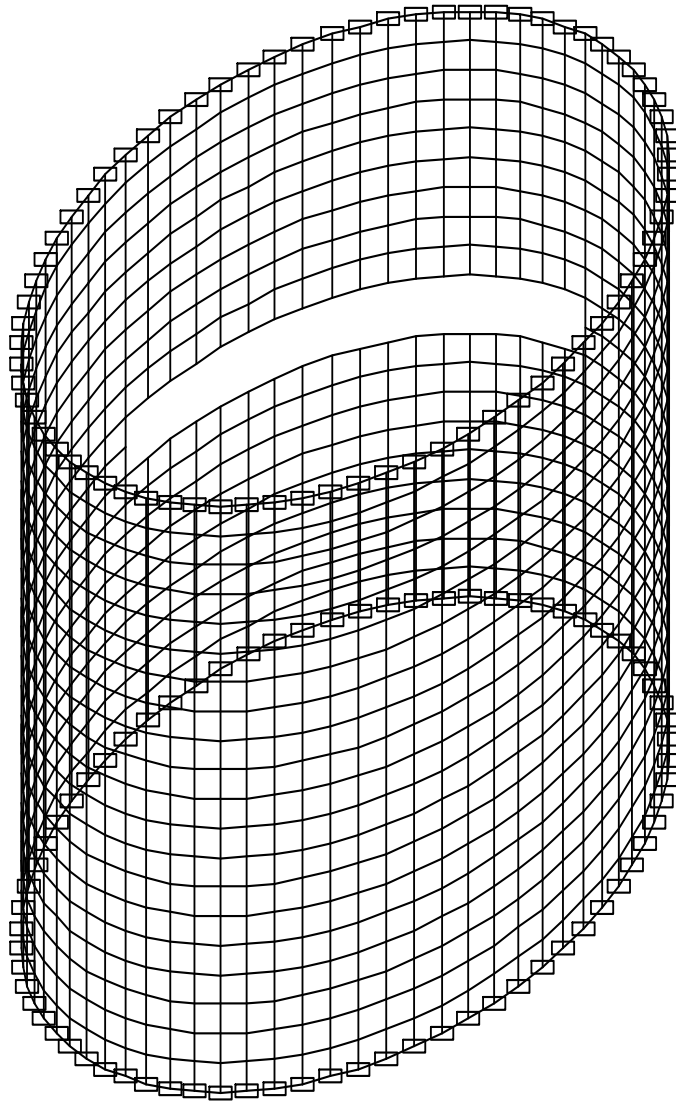


Рис. 3.39. Розрахункова схема оболонки з вирізом

## Результати розрахунків

Табл. 3.28. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 72$ ;  $h_{el} = 10$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	2.62e-004	3817.433	607.871	0.002
2	2	2.614e-004	3825.442	609.147	0.002
2	3	2.46e-004	4065.38	647.354	0.002
2	4	2.457e-004	4069.475	648.006	0.002
2	5	2.273e-004	4399.276	700.522	0.001
2	6	2.25e-004	4443.806	707.612	0.001
2	7	2.05e-004	4878.47	776.826	0.001
2	8	2.038e-004	4906.316	781.26	0.001
2	9	1.987e-004	5032.573	801.365	0.001
2	10	1.956e-004	5111.352	813.91	0.001
2	11	1.662e-004	6018.33	958.333	0.001
2	12	1.659e-004	6028.743	959.991	0.001

Табл. 3.29. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 72$ ;  $h_{el} = 15$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	2.575e-004	3883.88	618.452	0.002
2	2	2.569e-004	3893.309	619.954	0.002
2	3	2.451e-004	4079.261	649.564	0.002
2	4	2.446e-004	4087.629	650.896	0.002
2	5	2.234e-004	4476.533	712.824	0.001
2	6	2.214e-004	4516.585	719.201	0.001
2	7	2.046e-004	4887.771	778.307	0.001
2	8	2.039e-004	4905.537	781.136	0.001
2	9	1.982e-004	5046.409	803.568	0.001
2	10	1.968e-004	5082.257	809.277	0.001
2	11	1.64e-004	6098.426	971.087	0.001
2	12	1.64e-004	6098.172	971.047	0.001

Табл. 3.30. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 72$ ;  $h_{el} = 20$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	2.586e-004	3866.263	615.647	0.002
2	2	2.572e-004	3888.018	619.111	0.002
2	3	2.452e-004	4077.604	649.3	0.002
2	4	2.452e-004	4078.664	649.469	0.002
2	5	2.218e-004	4509.39	718.056	0.001
2	6	2.217e-004	4511.525	718.396	0.001
2	7	2.097e-004	4769.229	759.431	0.001
2	8	2.031e-004	4923.494	783.996	0.001
2	9	2.026e-004	4935.21	785.861	0.001
2	10	2.021e-004	4948.309	787.947	0.001
2	11	1.65e-004	6060.721	965.083	0.001
2	12	1.643e-004	6086.315	969.158	0.001

Табл. 3.31. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 72$ ;  $h_{el} = 25$ )

Периоды колебаний					
Загрузка	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	2.57e-004	3891.721	619.701	0.002
2	2	2.559e-004	3907.268	622.176	0.002
2	3	2.447e-004	4086.252	650.677	0.002
2	4	2.444e-004	4091.393	651.496	0.002
2	5	2.205e-004	4534.412	722.04	0.001
2	6	2.202e-004	4540.565	723.02	0.001
2	7	2.073e-004	4824.354	768.209	0.001
2	8	2.023e-004	4942.006	786.944	0.001
2	9	2.025e-004	4938.811	786.435	0.001
2	10	2.016e-004	4960.754	789.929	0.001
2	11	1.641e-004	6095.625	970.641	0.001
2	12	1.636e-004	6112.029	973.253	0.001

Табл. 3.32. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 72$ ;  $h_{el} = 30$ )

Периоды колебаний					
Загрузка	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	2.587e-004	3865.229	615.482	0.002
2	2	2.574e-004	3884.563	618.561	0.002
2	3	2.453e-004	4077.098	649.219	0.002
2	4	2.452e-004	4077.874	649.343	0.002
2	5	2.224e-004	4496.757	716.044	0.001
2	6	2.219e-004	4505.962	717.51	0.001
2	7	2.08e-004	4807.788	765.571	0.001
2	8	2.035e-004	4913.032	782.33	0.001
2	9	2.017e-004	4958.466	789.565	0.001
2	10	2.011e-004	4973.136	791.901	0.001
2	11	1.648e-004	6067.246	966.122	0.001
2	12	1.642e-004	6088.435	969.496	0.001

Табл. 3.33. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 72$ ;  $h_{el} = 35$ )

Периоды колебаний					
Загрузка	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	2.574e-004	3884.474	618.547	0.002
2	2	2.564e-004	3900.394	621.082	0.002
2	3	2.448e-004	4084.306	650.367	0.002
2	4	2.446e-004	4087.756	650.916	0.002
2	5	2.214e-004	4516.343	719.163	0.001
2	6	2.208e-004	4528.157	721.044	0.001
2	7	2.068e-004	4836.433	770.133	0.001
2	8	2.032e-004	4920.542	783.526	0.001
2	9	2.012e-004	4969.596	791.337	0.001
2	10	2.008e-004	4979.492	792.913	0.001
2	11	1.642e-004	6090.472	969.82	0.001
2	12	1.638e-004	6106.478	972.369	0.001

Табл. 3.34. **Периоды колебаний** ( $R_{ел} = 72$ ;  $h_{ел} = 40$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	2.583e-004	3871.723	616.516	0.002
2	2	2.569e-004	3892.429	619.814	0.002
2	3	2.45e-004	4082.027	650.004	0.002
2	4	2.449e-004	4082.694	650.111	0.002
2	5	2.215e-004	4515.629	719.049	0.001
2	6	2.214e-004	4517.546	719.354	0.001
2	7	2.088e-004	4788.509	762.501	0.001
2	8	2.029e-004	4929.593	784.967	0.001
2	9	2.023e-004	4942.682	787.051	0.001
2	10	2.018e-004	4956.09	789.186	0.001
2	11	1.647e-004	6070.305	966.609	0.001
2	12	1.641e-004	6094.391	970.444	0.001

## Похибка отриманих результатів

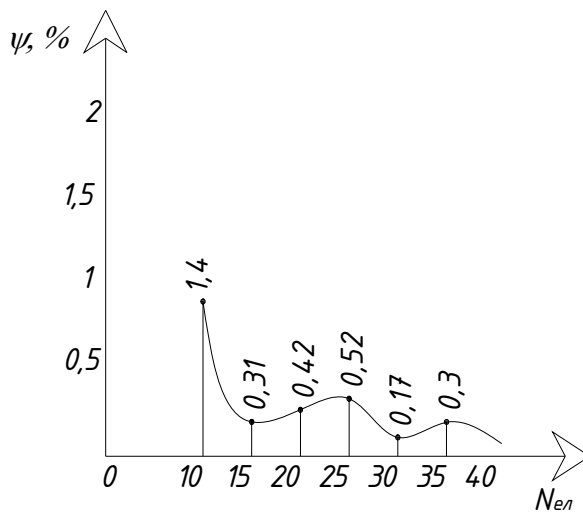


Рис. 3.40. 1-й період коливань

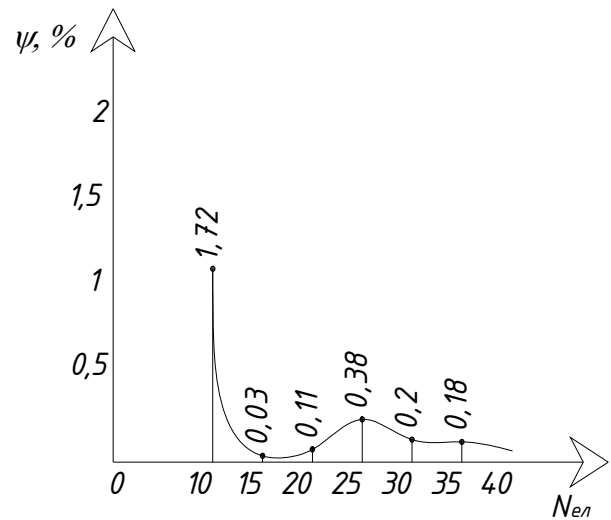


Рис. 3.41. 2-й період коливань

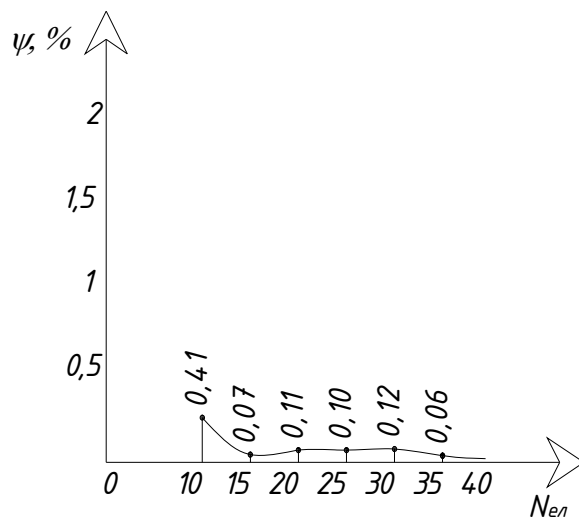


Рис. 3.42. 3-й період коливань

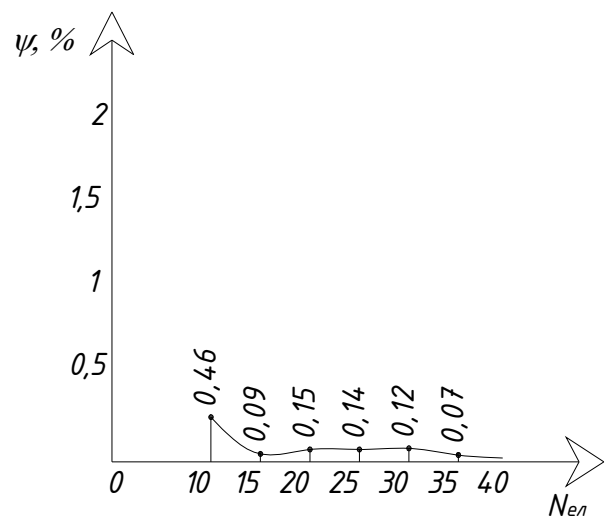


Рис. 3.43. 4-й період коливань

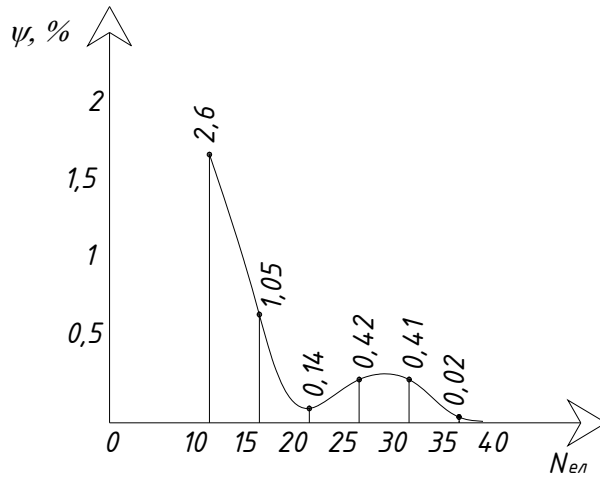


Рис. 3.44. 5-й період коливань

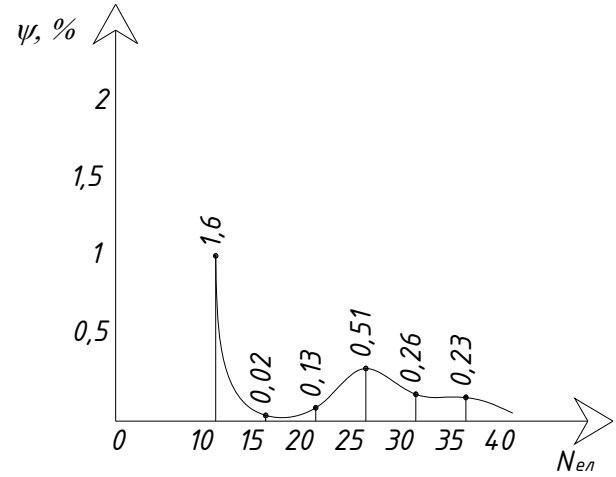


Рис. 3.45. 6-й період коливань

За отриманими результатами розрахунків можна зробити висновок, що після розбиття розрахункової схеми по висоті на 20 СЕ, ми отримуємо точність розрахунків з відносною похибкою  $<1\%$ . Виконуємо розрахунок циліндричної оболонки змінюючи кількість СЕ по радіусу обертання, а по висоті кількість СЕ приймаємо сталою  $h_{ел} = 20$ .

### Результати розрахунків

Табл. 3.35. **Периоды колебаний** ( $R_{ел} = 20$ ;  $h_{ел} = 20$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	2.442e-004	4095.267	652.113	0.002
2	2	2.422e-004	4129.032	657.489	0.002
2	3	2.294e-004	4358.941	694.099	0.001
2	4	2.288e-004	4370.603	695.956	0.001
2	5	2.133e-004	4687.982	746.494	0.001
2	6	2.128e-004	4700.068	748.418	0.001
2	7	1.955e-004	5116.219	814.685	0.001
2	8	1.914e-004	5224.81	831.976	0.001
2	9	1.914e-004	5225.508	832.087	0.001
2	10	1.91e-004	5236.902	833.902	0.001
2	11	1.612e-004	6201.575	987.512	0.001
2	12	1.603e-004	6238.405	993.377	0.001



Табл. 3.36. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 32$ ;  $h_{el} = 20$ )

Периоды колебаний					
Загрузка	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	2.541e-004	3934.797	626.56	0.002
2	2	2.525e-004	3960.426	630.641	0.002
2	3	2.404e-004	4159.204	662.294	0.002
2	4	2.4e-004	4166.423	663.443	0.002
2	5	2.189e-004	4567.417	727.296	0.001
2	6	2.187e-004	4572.532	728.11	0.001
2	7	2.046e-004	4888.392	778.406	0.001
2	8	1.984e-004	5040.317	802.598	0.001
2	9	1.983e-004	5044.075	803.197	0.001
2	10	1.98e-004	5049.535	804.066	0.001
2	11	1.637e-004	6108.33	972.664	0.001
2	12	1.628e-004	6140.993	977.865	0.001

Табл. 3.37. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 42$ ;  $h_{el} = 20$ )

Периоды колебаний					
Загрузка	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	2.565e-004	3899.01	620.861	0.002
2	2	2.549e-004	3922.672	624.629	0.002
2	3	2.43e-004	4115.037	655.261	0.002
2	4	2.428e-004	4118	655.733	0.002
2	5	2.204e-004	4536.791	722.419	0.001
2	6	2.202e-004	4540.6	723.026	0.001
2	7	2.041e-004	4898.386	779.998	0.001
2	8	2.007e-004	4983.333	793.524	0.001
2	9	2.003e-004	4992.744	795.023	0.001
2	10	1.973e-004	5068.257	807.047	0.001
2	11	1.644e-004	6081.947	968.463	0.001
2	12	1.636e-004	6113.773	973.531	0.001

Табл. 3.38. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 52$ ;  $h_{el} = 20$ )

Периоды колебаний					
Загрузка	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	2.577e-004	3880.694	617.945	0.002
2	2	2.562e-004	3902.929	621.485	0.002
2	3	2.443e-004	4093.121	651.771	0.002
2	4	2.441e-004	4095.863	652.208	0.002
2	5	2.211e-004	4522.329	720.116	0.001
2	6	2.21e-004	4525.065	720.552	0.001
2	7	2.086e-004	4792.822	763.188	0.001
2	8	2.02e-004	4949.65	788.161	0.001
2	9	2.018e-004	4955.179	789.041	0.001
2	10	2.013e-004	4967.534	791.009	0.001
2	11	1.647e-004	6071.587	966.813	0.001
2	12	1.64e-004	6099.067	971.189	0.001

Табл. 3.39. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 62; h_{el} = 20$ )

Периоды колебаний					
Загрузка	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	2.583e-004	3870.79	616.368	0.002
2	2	2.57e-004	3891.724	619.701	0.002
2	3	2.45e-004	4081.848	649.976	0.002
2	4	2.449e-004	4084.012	650.32	0.002
2	5	2.216e-004	4511.873	718.451	0.001
2	6	2.213e-004	4518.8	719.554	0.001
2	7	2.112e-004	4734.136	753.843	0.001
2	8	2.051e-004	4875.449	776.345	0.001
2	9	2.024e-004	4941.839	786.917	0.001
2	10	2.019e-004	4953.315	788.744	0.001
2	11	1.649e-004	6065.866	965.902	0.001
2	12	1.642e-004	6090.26	969.787	0.001

Табл. 3.40. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 72; h_{el} = 20$ )

Периоды колебаний					
Загрузка	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	2.586e-004	3866.263	615.647	0.002
2	2	2.572e-004	3888.018	619.111	0.002
2	3	2.452e-004	4077.604	649.3	0.002
2	4	2.452e-004	4078.664	649.469	0.002
2	5	2.218e-004	4509.39	718.056	0.001
2	6	2.217e-004	4511.525	718.396	0.001
2	7	2.097e-004	4769.229	759.431	0.001
2	8	2.031e-004	4923.494	783.996	0.001
2	9	2.026e-004	4935.21	785.861	0.001
2	10	2.021e-004	4948.309	787.947	0.001
2	11	1.65e-004	6060.721	965.083	0.001
2	12	1.643e-004	6086.315	969.158	0.001

### Похибка отриманих результатів

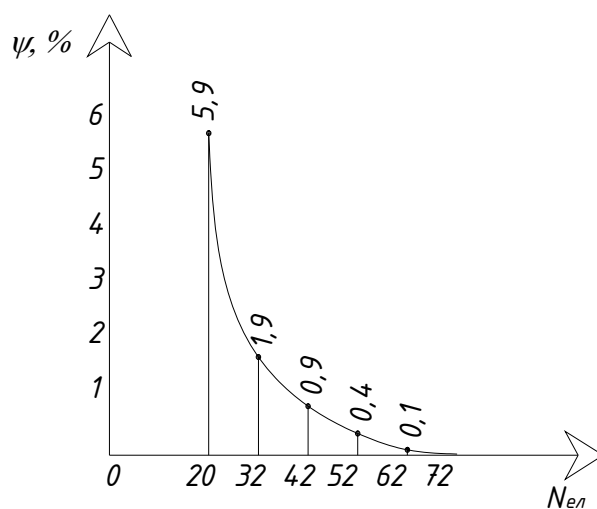


Рис. 3.46. 1-й період коливань

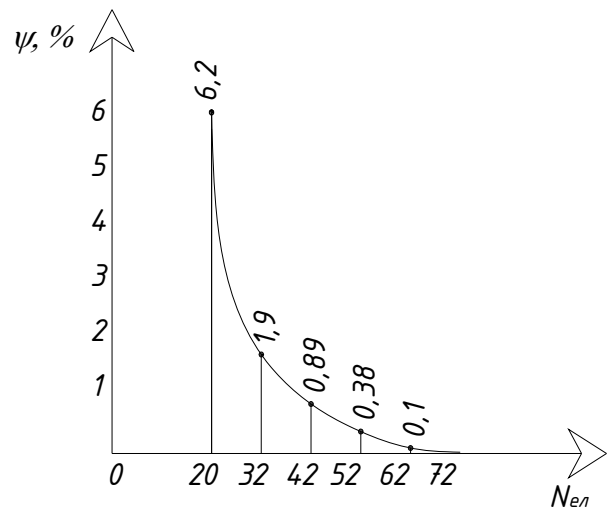


Рис. 3.47. 2-й період коливань

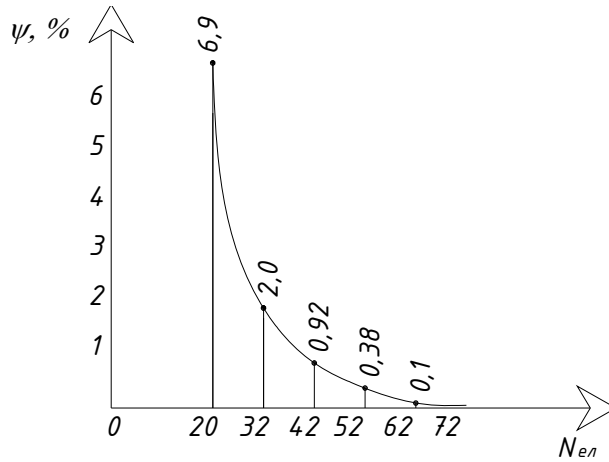


Рис. 3.48. 3-й період коливань

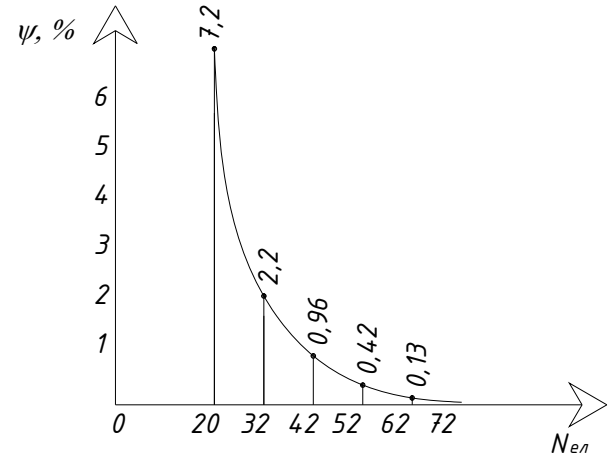


Рис. 3.49. 4-й період коливань

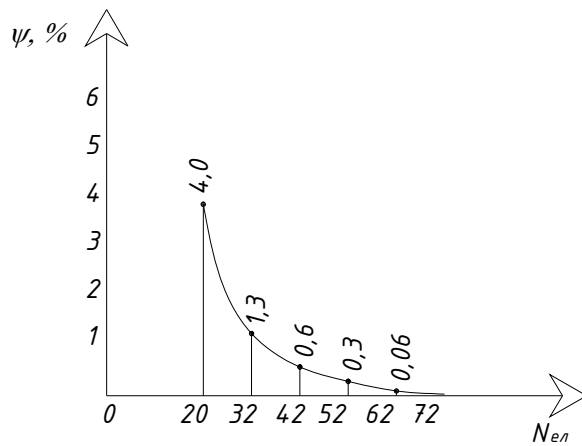


Рис. 3.50. 5-й період коливань

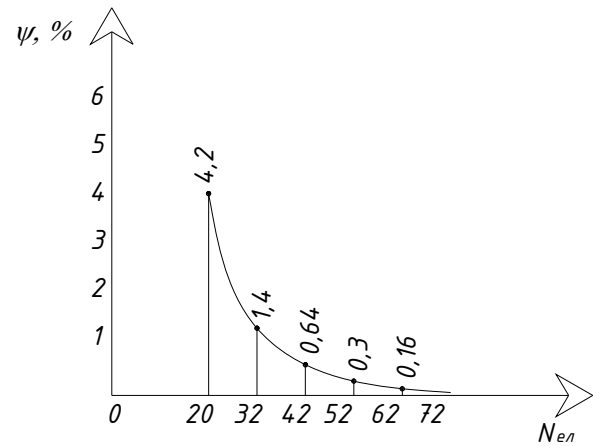


Рис. 3.51. 6-й період коливань

За отриманими результатами розрахунків можна зробити висновок, що після розбиття розрахункової схеми по радіусу обертання  $R$  на 42 СЕ, ми отримуємо точність розрахунків з відносною похибкою  $< 1\%$ .

Для порівняння виконуємо розрахунок оболонки без вирізу з сіткою SE 42x20.

Табл. 3.41. **Периоды колебаний** ( $R_{el} = 42$ ;  $h_{el} = 20$ )

Периоды колебаний					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	2.542e-004	3933.902	626.418	0.002
2	2	2.542e-004	3933.886	626.415	0.002
2	3	2.411e-004	4147.22	660.385	0.002
2	4	2.411e-004	4147.238	660.388	0.002
2	5	2.205e-004	4534.765	722.096	0.001
2	6	2.205e-004	4534.822	722.105	0.001
2	7	1.991e-004	5021.83	799.654	0.001
2	8	1.991e-004	5021.753	799.642	0.001
2	9	1.65e-004	6061.412	965.193	0.001
2	10	1.65e-004	6061.545	965.214	0.001
2	11	1.571e-004	6364.228	1013.412	0.001
2	12	1.571e-004	6367.003	1013.854	0.001

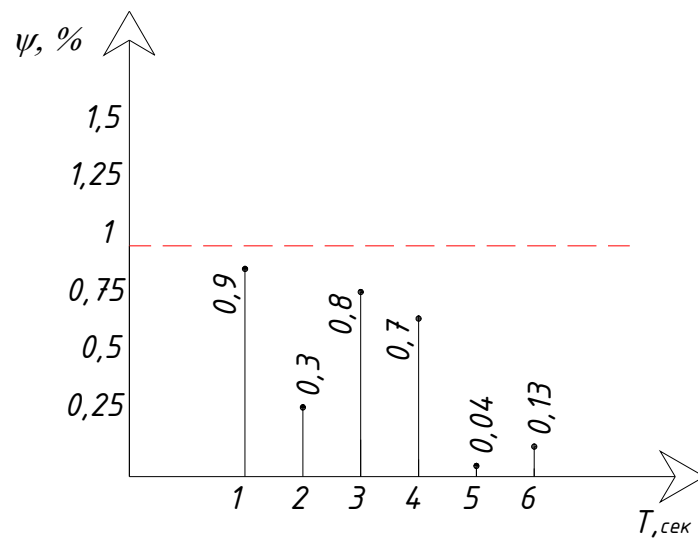


Рис. 3.52. Похибка отриманих результатів

Цікаво відзначити, що виріз ( $\alpha=90^\circ$ ,  $a=0,1L$ ) незначно вплинув на зміну власних частот і форм коливань оболонки. Як бачимо з графіка, відносна похибка отриманих результатів не перевищує 1%.

## Форми власних коливань

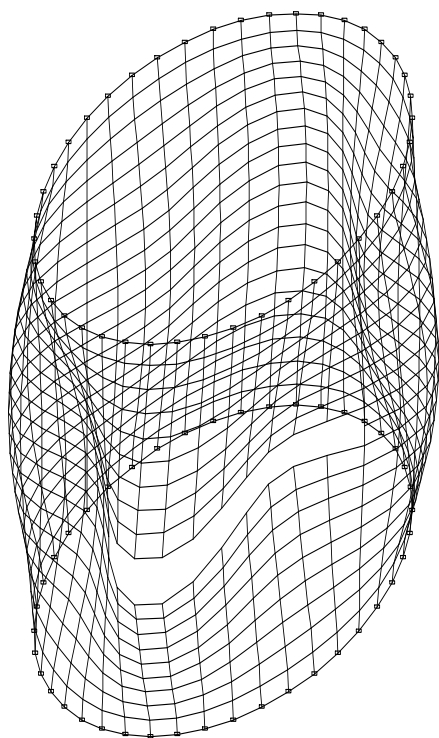


Рис. 3.53. 1-а форма  
власних коливань

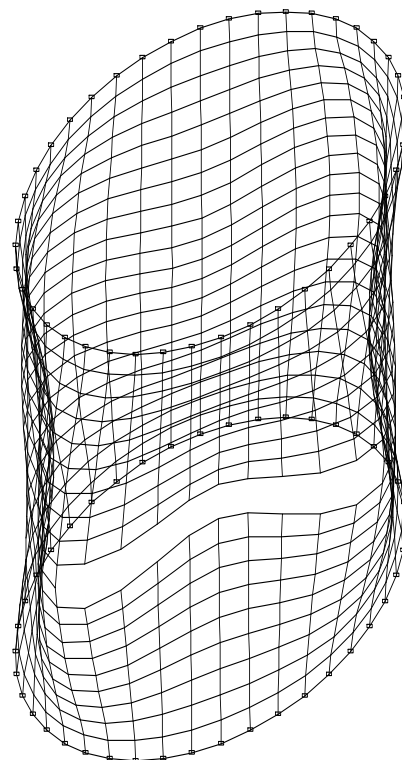


Рис. 3.54. 2-а форма  
власних коливань

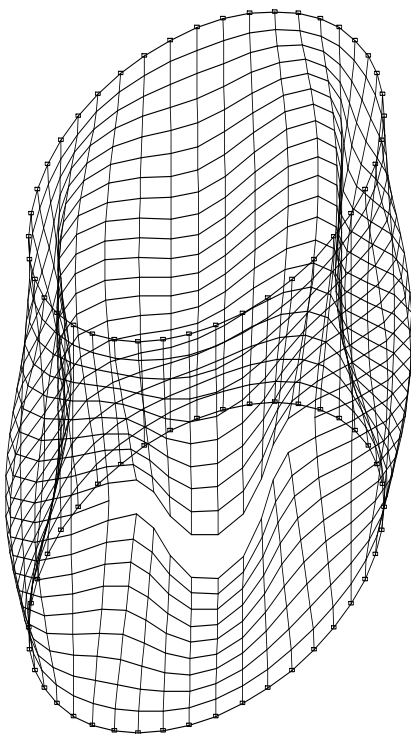


Рис. 3.55. 3-а форма  
власних коливань

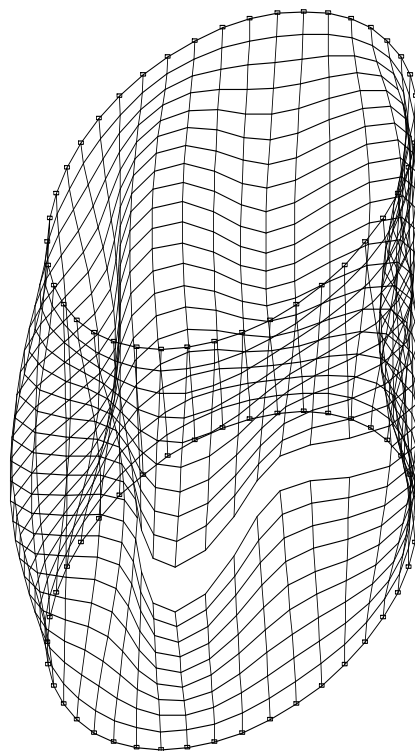


Рис. 3.56. 4-а форма  
власних коливань

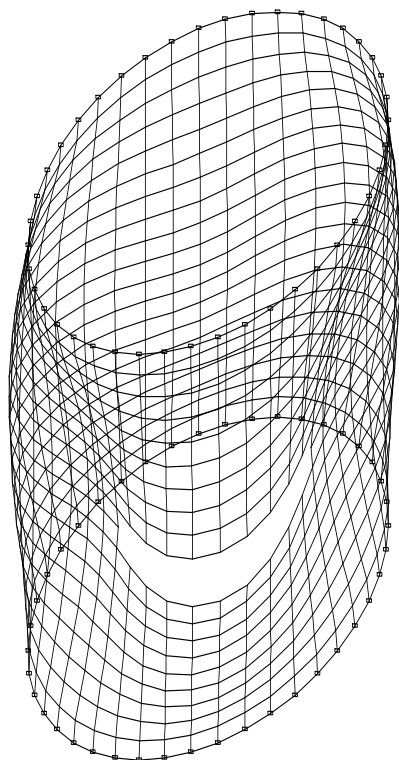


Рис. 3.57. 5-а форма  
власних коливань

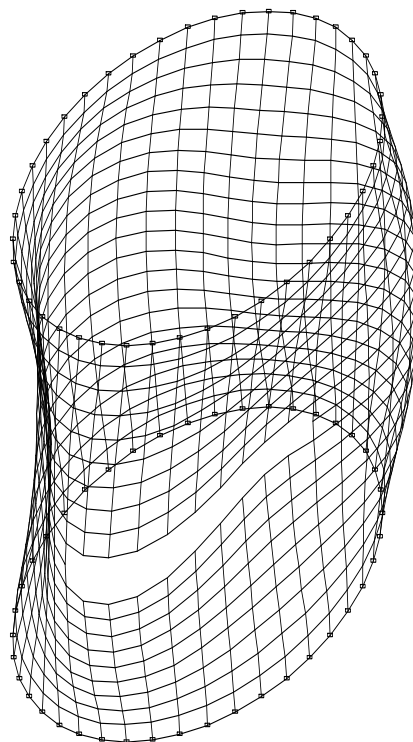


Рис. 3.58. 6-а форма  
власних коливань

Слід відзначити, що для вивчення характеру поведінки контуру вирізу необхідно провести додаткові дослідження більш високих частот. Для цього виконуємо розрахунок циліндричної оболонки з вирізом і без вирізу обчислюючи 50 форм власних коливань.

Порівнюючи отримані результати (табл. 3.42), можна зробити висновок, що вже при 9 формі власних коливань відбувається деформація контуру вирізу.

Табл. 3.42. Порівняння отриманих результатів

Період коливань	Частота для оболонки з вирізом	Частота для оболонки без вирізу	$\psi, \%$
	1/C	1/C	
1	3898,702	3933,881	0,00
2	3922,649	3933,881	0,29
3	4114,923	4147,218	0,78
4	4117,811	4147,218	0,71
5	4536,74	4534,76	0,04
6	4540,442	4534,76	0,13
7	4898,386	5021,646	2,45
8	4983,226	5021,646	0,77
9	4992,626	6061,292	17,63
10	5068,257	6061,292	16,38
11	6081,832	6362,014	4,40
12	6113,279	6362,014	3,91
13	6322,17	7034,813	10,13
14	6332,097	7034,813	9,99
15	6938,045	7333,353	5,39
16	6966,384	7333,353	5,00
17	7192,28	7452,92	3,50
18	7212,077	7452,92	3,23
19	7672,545	8041,478	4,59
20	7843,577	8041,478	2,46
21	7985,514	8406,45	5,01
22	8010,362	8406,45	4,71
23	8129,135	8467,24	3,99
24	8139,326	8467,24	3,87
25	8952,539	8920,203	0,36
26	9015,114	8920,203	1,06
27	9206,287	9945,501	7,43
28	9534,79	9945,501	4,13
29	9550,686	9996,578	4,46
30	9705,886	9996,578	2,91
31	9928,074	10184,615	2,52
32	9953,97	10184,615	2,26
33	10435,404	10486,985	0,49
34	10451,189	10486,985	0,34
35	10721,12	10767,488	0,43
36	10735,469	10767,488	0,30
37	10742,965	10771,977	0,27

38	10753,451	10771,977	0,17
39	11124,966	11522,333	3,45
40	11175,539	11522,334	3,01
41	11355,58	11608,411	2,18
42	11483,655	11608,411	1,07
43	11503,337	11784,792	2,39
44	11514,728	11784,792	2,29
45	11525,945	12116,82	4,88
46	11592,948	12116,827	4,32
47	11600,72	12193,394	4,86
48	12049,214	12193,473	1,18
49	12113,452	12513,711	3,20
50	12147,756	12514,907	2,93

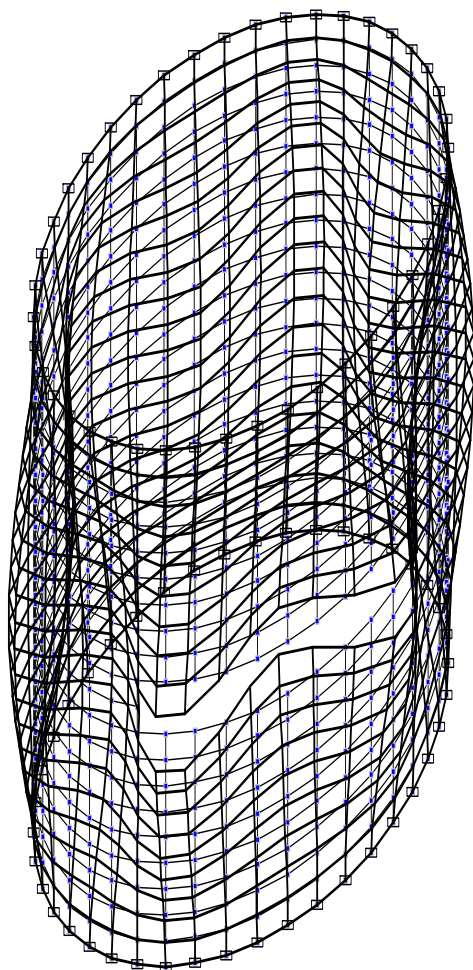


Рис. 3.59. 9-а форма  
власних коливань

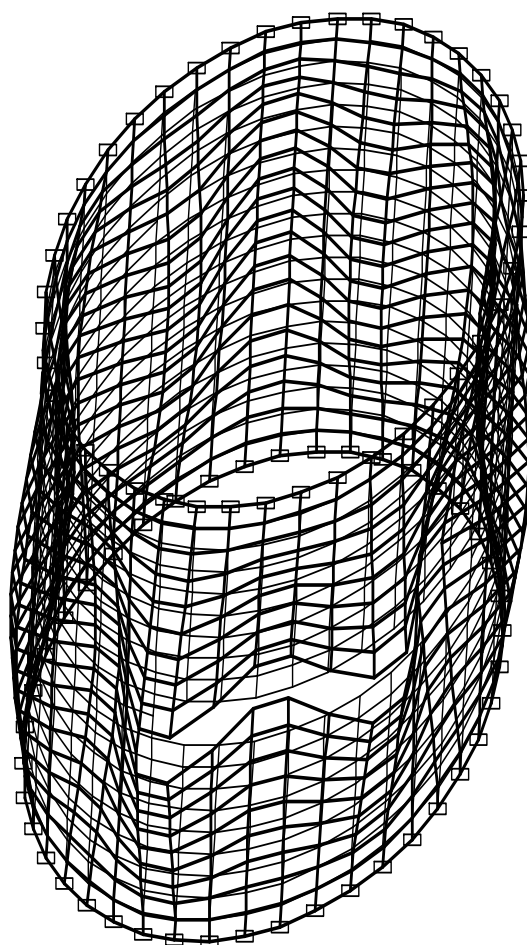


Рис. 3.60. 13-а форма  
власних коливань



## 4. Визначення динамічних характеристик промислової димової труби

Фасад димової труби Н=320 м Конструкція димової труби Н=320 м

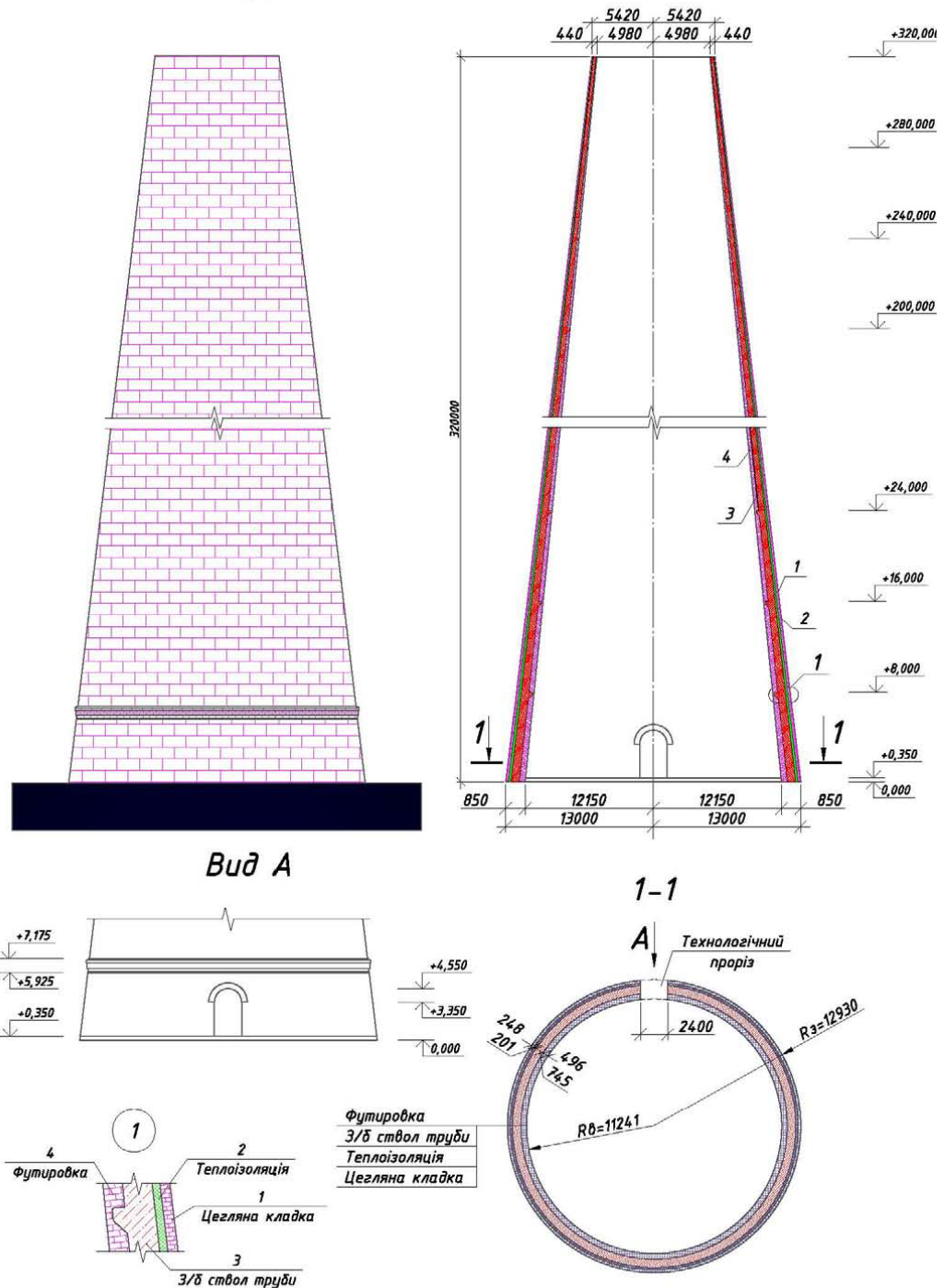


Рис. 4.1. Залізобетонна димова труба

До розрахунку прийнята промислова залізобетонна димова труба висотою 320 м. До ствола безпосередньо примикають теплоізоляція з облицювальною цегляною кладкою. Футеровка труби виконана із кислотостійкої цегли (рис. 4.1). Поміж футеровкою та облицювальною цеглою маються вентиляємні зазори перемінної величини. Бетон труби прийнятий класу В35. Нахил зовнішньої грані вісі труби –  $i=2,36\%$ .

Труба розбивається по висоті на 16 рівних ділянок з рівними інтервалами між перерізами – 20 м.

Для спрощення визначення фізико-механічних характеристик кожної розрахункової ділянки всі розрахунки зводимо до таблиць.

Табл. 4.1. Визначення приведенного модуля пружності

Відмітка,м	Матеріал	$R_{сер,м}$	$R_{i,м}$	$W,м$	$W_{i,м}$	$E_i,МПа$	$E_{сер,МПа}$	$\alpha$	$E_{прив,МПа}$		
20	Цегляна кладка	12,121	12,468	0,81	0,116	3	10,3325	0,147309689	19		
	Теплоізоляція		12,368					0,049		0,83	0,061726562
	З/б ствол труби		12,158					0,407		34,5	0,50400295
	Футировка		11,835					0,238		3	0,286894187
40	Цегляна кладка	11,667	11,996	0,771	0,112	3	10,3325	0,149362269	19		
	Теплоізоляція		11,916					0,048		0,83	0,06358551
	З/б ствол труби		11,7					0,385		34,5	0,500763903
	Футировка		11,394					0,226		3	0,286266863
60	Цегляна кладка	11,213	11,524	0,732	0,109	3	10,3325	0,153037141	19		
	Теплоізоляція		11,447					0,046		0,83	0,064152947
	З/б ствол труби		11,243					0,363		34,5	0,497228407
	Футировка		10,954					0,214		3	0,285596977
80	Цегляна кладка	10,759	11,053	0,693	0,105	3	10,3325	0,155655448	18		
	Теплоізоляція		10,978					0,045		0,83	0,066256822
	З/б ствол труби		10,785					0,34		34,5	0,491806115

	Футировка		10,514		0,203	3		0,286258815	
100	Цегляна кладка	10,305	10,581	0,653	0,101	3	10,3325	0,158813315	18
	Теплоізоляція		10,508		0,044	0,83		0,068708673	
	З/б ствол труби		10,328		0,318	34,5		0,488070065	
	Футировка		10,073		0,191	3		0,285911105	
120	Цегляна кладка	9,851	10,109	0,615	0,098	3	10,3325	0,163522997	18
	Теплоізоляція		10,039		0,043	0,83		0,071253053	
	З/б ствол труби		9,87		0,295	34,5		0,480599964	
	Футировка		9,633		0,179	3		0,284615899	
140	Цегляна кладка	9,397	9,637	0,575	0,094	3	10,3325	0,167653506	18
	Теплоізоляція		9,569		0,041	0,83		0,072609482	
	З/б ствол труби		9,413		0,273	34,5		0,475591007	
	Футировка		9,193		0,167	3		0,284129718	
160	Цегляна кладка	8,943	9,165	0,535	0,09	3	10,3325	0,17240028	18
	Теплоізоляція		9,1		0,04	0,83		0,076078926	
	З/б ствол труби		8,955		0,25	34,5		0,467916744	
	Футировка		8,753		0,155	3		0,283564339	
180	Цегляна кладка	8,488	8,693	0,496	0,086	3	10,3325	0,177574697	17
	Теплоізоляція		8,631		0,039	0,83		0,07995372	
	З/б ствол труби		8,498		0,228	34,5		0,460218981	
	Футировка		8,312		0,143	3		0,282328373	
200	Цегляна кладка	8,034	8,221	0,456	0,083	3	10,3325	0,186254198	17
	Теплоізоляція		8,161		0,038	0,83		0,084650651	
	З/б ствол труби		8,04		0,205	34,5		0,449897148	
	Футировка		7,872		0,13	3		0,279339125	
220	Цегляна кладка	7,58	7,749	0,417	0,079	3	10,3325	0,193672292	17
	Теплоізоляція		7,692		0,036	0,83		0,087606537	

	3/б ствол труби		7,583		0,183	34,5		0,439022608	
	Футировка		7,432		0,119	3		0,279799801	
240	Цегляна кладка	7,126	7,278	0,378	0,075	3	10,3325	0,202644909	16
	Теплоізоляція		7,223		0,035	0,83		0,093852975	
	3/б ствол труби		7,125		0,16	34,5		0,423221024	
	Футировка		6,991		0,108	3		0,280301512	
260	Цегляна кладка	6,672	6,806	0,338	0,071	3	10,3325	0,214277986	16
	Теплоізоляція		6,753		0,034	0,83		0,101812928	
	3/б ствол труби		6,668		0,138	34,5		0,408039249	
	Футировка		6,551		0,095	3		0,275967835	
280	Цегляна кладка	6,218	6,334	0,299	0,068	3	10,3325	0,231667475	15
	Теплоізоляція		6,284		0,032	0,83		0,108159395	
	3/б ствол труби		6,21		0,115	34,5		0,384120543	
	Футировка		6,111		0,084	3		0,276102071	
300	Цегляна кладка	5,764	5,862	0,259	0,063	3	10,3325	0,247378885	14
	Теплоізоляція		5,814		0,031	0,83		0,120729384	
	3/б ствол труби		5,753		0,093	34,5		0,358388105	
	Футировка		5,67		0,072	3		0,273458747	
320	Цегляна кладка	5,31	5,39	0,22	0,06	3	10,3325	0,276836158	13
	Теплоізоляція		5,345		0,03	0,83		0,137262455	
	3/б ствол труби		5,295		0,07	34,5		0,317282999	
	Футировка		5,23		0,06	3		0,268618387	

Табл. 4.2. Визначення приведеної густини

Відмітка,м	Матеріал	$R_{сер,м}$	$R_{i,м}$	$W,м$	$W_{i,м}$	$\rho_i,кг/м^3$	$\rho_{сер,кг/м^3}$	$\alpha$	$\rho_{прив,кг/м^3}$
20	Цегляна кладка	12,121	12,468	0,81	0,116	1800	1550	0,147309689	2048
	Теплоізоляція		12,368		0,049	100		0,061726562	
	З/б ствол труби		12,158		0,407	2500		0,50400295	
	Футировка		11,835		0,238	1800		0,286894187	
40	Цегляна кладка	11,667	11,996	0,771	0,112	1800	1550	0,149362269	2042
	Теплоізоляція		11,916		0,048	100		0,06358551	
	З/б ствол труби		11,7		0,385	2500		0,500763903	
	Футировка		11,394		0,226	1800		0,286266863	
60	Цегляна кладка	11,213	11,524	0,732	0,109	1800	1550	0,153037141	2039
	Теплоізоляція		11,447		0,046	100		0,064152947	
	З/б ствол труби		11,243		0,363	2500		0,497228407	
	Футировка		10,954		0,214	1800		0,285596977	
80	Цегляна кладка	10,759	11,053	0,693	0,105	1800	1550	0,155655448	2032
	Теплоізоляція		10,978		0,045	100		0,066256822	
	З/б ствол труби		10,785		0,34	2500		0,491806115	
	Футировка		10,514		0,203	1800		0,286258815	
100	Цегляна кладка	10,305	10,581	0,653	0,101	1800	1550	0,158813315	2028
	Теплоізоляція		10,508		0,044	100		0,068708673	
	З/б ствол труби		10,328		0,318	2500		0,488070065	
	Футировка		10,073		0,191	1800		0,285911105	
120	Цегляна кладка	9,851	10,109	0,615	0,098	1800	1550	0,163522997	2015
	Теплоізоляція		10,039		0,043	100		0,071253053	
	З/б ствол труби		9,87		0,295	2500		0,480599964	
	Футировка		9,633		0,179	1800		0,284615899	
	Цегляна кладка	9,397	9,637	0,575	0,094	1800	1550	0,167653506	2009

140	Теплоізоляція		9,569		0,041	100		0,072609482	
	З/б ствол труби		9,413		0,273	2500		0,475591007	
	Футировка		9,193		0,167	1800		0,284129718	
160	Цегляна кладка	8,943	9,165	0,535	0,09	1800	1550	0,17240028	1998
	Теплоізоляція		9,1		0,04	100		0,076078926	
	З/б ствол труби		8,955		0,25	2500		0,467916744	
	Футировка		8,753		0,155	1800		0,283564339	
180	Цегляна кладка	8,488	8,693	0,496	0,086	1800	1550	0,177574697	1986
	Теплоізоляція		8,631		0,039	100		0,07995372	
	З/б ствол труби		8,498		0,228	2500		0,460218981	
	Футировка		8,312		0,143	1800		0,282328373	
200	Цегляна кладка	8,034	8,221	0,46	0,083	1800	1550	0,186254198	1971
	Теплоізоляція		8,161		0,038	100		0,084650651	
	З/б ствол труби		8,04		0,205	2500		0,449897148	
	Футировка		7,872		0,13	1800		0,279339125	
220	Цегляна кладка	7,58	7,749	0,42	0,079	1800	1550	0,193672292	1959
	Теплоізоляція		7,692		0,036	100		0,087606537	
	З/б ствол труби		7,583		0,183	2500		0,439022608	
	Футировка		7,432		0,119	1800		0,279799801	
240	Цегляна кладка	7,126	7,278	0,38	0,075	1800	1550	0,202644909	1937
	Теплоізоляція		7,223		0,035	100		0,093852975	
	З/б ствол труби		7,125		0,16	2500		0,423221024	
	Футировка		6,991		0,108	1800		0,280301512	
260	Цегляна кладка	6,672	6,806	0,34	0,071	1800	1550	0,214277986	1913
	Теплоізоляція		6,753		0,034	100		0,101812928	
	З/б ствол труби		6,668		0,138	2500		0,408039249	
	Футировка		6,551		0,095	1800		0,275967835	

280	Цегляна кладка	6,218	6,334	0,3	0,068	1800	1550	0,231667475	1885
	Теплоізоляція		6,284		0,032	100		0,108159395	
	З/б ствол труби		6,21		0,115	2500		0,384120543	
	Футировка		6,111		0,084	1800		0,276102071	
300	Цегляна кладка	5,764	5,862	0,26	0,063	1800	1550	0,247378885	1846
	Теплоізоляція		5,814		0,031	100		0,120729384	
	З/б ствол труби		5,753		0,093	2500		0,358388105	
	Футировка		5,67		0,072	1800		0,273458747	
320	Цегляна кладка	5,31	5,39	0,22	0,06	1800	1550	0,276836158	1789
	Теплоізоляція		5,345		0,03	100		0,137262455	
	З/б ствол труби		5,295		0,07	2500		0,317282999	
	Футировка		5,23		0,06	1800		0,268618387	

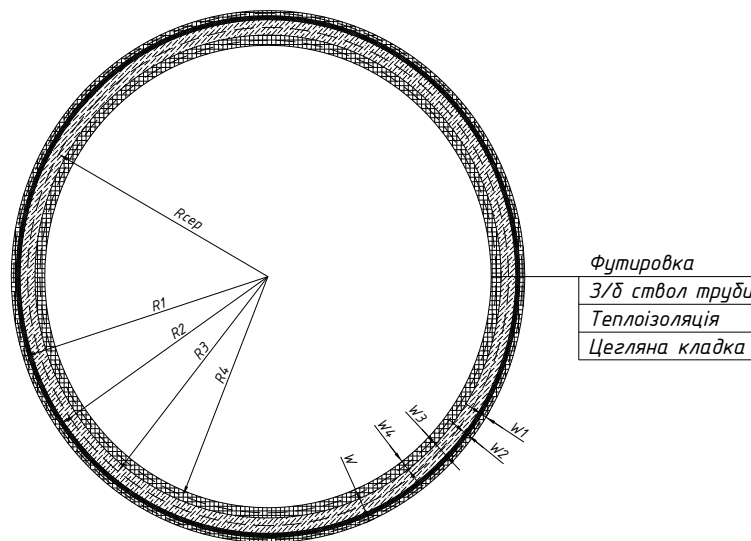


Рис. 4.2. Геометричні характеристики розрахункового перерізу

$R_{сер}$  – радіус до середини товщини розрахункового перерізу труби;  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  – радіуси до середини товщини кожного шару труби відповідно;  $W$  – повна ширина розрахункового перерізу труби;  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$ ,  $W_4$  – товщини кожного шару труби відповідно.

Моделюємо розрахунковий переріз промислової залізобетонної димової труби в програмному комплексі.



Рис. 4.3. Розрахункова схема димової труби



## Результати розрахунків

Табл. 4.3. Періоди коливань

Періоди коливань					
Загружение	Пор. номер	Собств. значение	Частота		Периоды (сек)
			1/сек	Гц	
2	1	0.733	1.365	0.217	4.6
2	2	0.218	4.59	0.731	1.368
2	3	0.06	16.607	2.644	0.378
2	4	0.098	10.169	1.619	0.618
2	5	0.064	15.635	2.49	0.402
2	6	0.058	17.144	2.73	0.366
2	7	0.056	17.763	2.828	0.354
2	8	0.055	18.274	2.91	0.344
2	9	0.051	19.665	3.131	0.319
2	10	0.048	20.999	3.344	0.299

## Форми власних коливань

## Висновки

Висотна димова труба – складна інженерна споруда, яка входить до виробничих систем в різних галузях народного господарства. Вона представляє собою комплексну систему взаємопов'язаних елементів, аналіз якої ускладнюється багат шаровою конструкцією оболонки витяжної вежі. Труби таких розмірів працюють при складному комплексі навантажень і впливів, що враховують сполучення статичних і динамічних розподілених і локальних навантажень

Постановка і розв'язання задачі виконані на основі напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ), який дозволяє істотно розширити ефективність традиційного методу скінченних елементів (МСЕ) в особливості для класу об'єктів, що розглядаються в даній роботі.

Оригінальний підхід до моделювання неоднорідності матеріалу дає можливість розглядати широкий діапазон зміни пружних постійних, включаючи граничний випадок, коли тіло має вирізи, що порушують вісесиметричність форми.

За допомогою розробленої методики проведені чисельні дослідження власних коливань висотної промислової димової труби. Отримані динамічні характеристики промислової димової труби у вигляді власних форм та частот. Враховано вплив технологічного отвору, який розташовується в основі труби.

Достовірність розрахунків підтверджена результатами розв'язання тестових задач, що охоплюють клас об'єктів, які розглядаються.

## Список використаних джерел

1. Коробов Л.А., Жарков А.Ф., Шерник А.О. Дымовые и вентиляционные трубы высотой 200-500 метров как пространственные сооружения. – Москва, 2006.- 245с.
2. Кельин В.И., Поляков Ю.Ф. Сочетание аналитического и численного методов при решении одного класса трехмерных задач теории упругости.- Ленинград, 1985.- 10с.- Рукопись деп. в ВИНТИ, № 5462-Деп.
3. Гузь А.Н., Луговой П.З., Мукоид В.П. К расчету пространственных колебаний пластин сложной формы // Прикл. мех. –1999. –35, №8. – С.44-54.
4. Куранов Б.А. Прочность и устойчивость оболочек вращения, подкрепленных нерегулярным набором кольцевых ребер // Расчеты на прочность.- 1977.- Вып. 18.- С.153-169.
5. Мерзляков В.А. Расчет нестационарных температурных полей в тонких оболочках вращения при неосесимметричном нагреве // Проблемы прочности.- 1982.- № 2.- С.81-84.
6. Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г. Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. - Киев: Випол, 1993, 376 с.
7. Баженов В.А., Гуляр А.И., Піскунов С.О., Солодей І.І.Шевченко Ю.В. Розрахункові співвідношення НМСЕ просторової задачі динаміки для неоднорідних тіл обертання з довільними граничними умовами. //Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2005 р. - Вип. 77. - С. 3-29.
8. Блох В.И. Теория упругости.- Харьков: Изд-во Харьк. ун-та.- 1964.483с.
9. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. - М.: Стройиздат, 1982. - 447 с.

10. Сахаров А.С., Кислоокий В.Н., Киричевский В.В. и др. Метод конечных элементов в механике твердых тел.- Киев: Вища школа, 1982.- 479с.
11. Елышин А.М., Ижорин М.Н., Жолудов В.С., Овчаренко Е.Г. Дымовые трубы. - М.: Стройиздат, 2001. - 296 с.
12. Баженов В.А., Гуляр О.І., Топор О.Г., Солодей І.І. “Ефективність алгоритмів розв’язання пружних та пружно-пластичних задач динаміки напіваналітичним методом скінченних елементів”, Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. – К.:КНУБА, Вип.64, 1998. –с.99-115.
13. Васильков Г.В., Панасюк Л.Н. “О прямых методах решения физически нелинейных задач динамики сооружений.” –Исследования по расчету пластин и оболочек, 1987. –С.4-12.
14. Гуляр А.И., Майборода Е.Е., Сахаров А.С. Полуаналитический метод конечных элементов в пространственных задачах термоупругопластичности призматических тел.// Проблемы прочности. - 1992. - № 12.
15. Гуляр О.І., Топор О.Г., Солодей І.І. “Просторова задача динаміки для пружнопластичних неоднорідних тіл обертання в схемі напіваналітичного методу скінченних елементів”, Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. – К.:КНУБА, Вип.66, 1999.
16. Сахаров А.С., Гуляр А.И., Топор А.Г. «Анализ напряженно-деформированного состояния тел вращения с вырезами, нарушающими осевую симметрию». Проблемы прочности, 1986, №6 – с.69-73.