



Министерство образования и науки Российской Федерации  
Государственное общеобразовательное учреждение высшего профессионального  
образования  
«Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»  
Инженерно-строительный факультет  
Кафедра: «Технология, организация и экономика строительства»

Магистерская диссертация допущена к  
защите  
Заведующий кафедрой, д.т.н., профессор

Н.И. Ватин

**Шатов Дмитрий Сергеевич**

## **Конечноэлементное моделирование стальных тонкостенных перфорированных стоек**

**Магистерская диссертация**

Направление: 270100 – Строительство

Руководитель, директор ООО «Архимет»

Д.Н.Смазнов

Научный консультант, д.т.н., проф.

Н.И.Ватин

Санкт-Петербург  
2011



Ministry of education and science of the Russian Federation

State Educational Institution of Higher Professional Learning  
Saint-Petersburg State Politechnical University

Faculty of Civil Engineering  
Department «Technology, Organization and Economy of Construction»

Master thesis is allowed to a protection  
Head of dept., University Professor, Dr. Sci.

N.I.Vatin

**Shatov Dmitry Sergeevich**

## **Finite Element Modeling of Thin-walled Perforated Studs**

**Master thesis**

Direction: 270100 – Civil Engineering

Supervisor, director LLC «Archimet»

Д.Н.Смазнов

Consulter, University Professor, Dr. Sci.

Н.И.ВАТИН

Saint-Petersburg  
2011

<b>Реферат</b> .....	<b>5</b>
<b>Введение</b> .....	<b>6</b>
<b>1. Обзор и анализ литературы, постановка задачи исследования</b> .....	<b>14</b>
<b>1.1. Исторический очерк развития теории расчета тонкостенных стержней.</b> ..	<b>15</b>
<b>1.2. Основы технической теории расчета тонкостенных стержней</b> .....	<b>23</b>
1.2.1. Стесненное кручение тонкостенного стержня открытого профиля.....	23
1.2.2. Секториальная площадь .....	26
1.2.3. Геометрические характеристики поперечного сечения.....	27
1.2.4. Система дифференциальных уравнений равновесия стержня .....	32
1.2.5. Касательные напряжения в сечении.....	35
<b>1.3. Устойчивость тонкостенных стержней</b> .....	<b>37</b>
1.3.1. Дифференциальное уравнение устойчивости 2-го рода для стержня с недеформируемым профилем.....	37
2.1.2. Дифференциальное уравнение устойчивости 1-го рода для стержня с недеформируемым профилем в случае центрального и внецентренного сжатия ..	38
1.3.2. Обобщенные силы при изгибе и стесненном кручении тонкостенных профилей .....	39
Кручение стержней открытого профиля с перфорацией.....	40
1.3.3. Дифференциальное уравнение устойчивости для стержня с деформируемым профилем.....	43
<b>1.4. Численные способы решения задач применительно к тонкостенным профилям. Современное состояние методик</b> .....	<b>44</b>
<b>1.5. Современное состояние методик расчета перфорированных тонкостенных профилей</b> .....	<b>57</b>
<b>1.6. Расчет тонкостенных профилей по методике Еврокода</b> .....	<b>62</b>
1.6.1. Местная потеря устойчивости.....	64
1.6.2. Потеря устойчивости формы поперечного сечения.....	68
<b>1.7. Постановка задачи исследования</b> .....	<b>72</b>
<b>2. Исследования эффективной ширины стенки по методике Еврокода</b> .....	<b>75</b>
<b>2.1. Пример расчета С профиля на сжатие и изгиб с учетом эффективных характеристик</b> .....	<b>76</b>
<b>3. Конечноэлементное моделирование тонкостенных стоек</b> .....	<b>95</b>
<b>3.1. Исследование касательных напряжений в составных профилях коробчатого сечения</b> .....	<b>95</b>
<b>3.2. Исследование нормальных напряжений в профилях открытого сечения</b> ....	<b>102</b>

<b>4. Научно обоснованные разработки .....</b>	<b>112</b>
<b>Заключение.....</b>	<b>125</b>
<b>Список использованных источников .....</b>	<b>130</b>

## Реферат

УДК 69.07

Работа содержит 133 страниц, 43 рисунка, 68 формул, 8 таблиц и 1 приложение. Список литературы состоит из 84 наименования, из них 49 на русском языке.

Ключевые слова: тонкостенный профиль, нормальные напряжения, касательные напряжения, эффективная ширина, сжатие, изгиб, метод конечных элементов, термопрофиль, просечки, перфорация.

Key words: thin-walled profile, direct stress, shear stress, effective width, compression, bending, finite element modeling, thermoprofile, holes, perforation.

Смоделированы методом конечных элементов стойки составного коробчатого сечения. Произведенная серия расчетов по деформациям дала хорошо согласующиеся с экспериментальными данными результаты. Показано, что распределение касательных напряжений не зависит от высоты профиля и мало влияет на его несущую способность. Произведен расчет стоечных профилей на сжатие и изгиб с учетом редуцированных характеристик аналитическим методом. Приведены данные об эффективной площади поперечного сечения при сжатии и эффективного момента сопротивления при изгибе.

Предложена методика линейного расчета тонкостенных перфорированных стоек открытого профиля на изгиб. Методом конечных элементов были смоделированы перфорированные и цельные профиля открытого сечения. При сравнении нормальных напряжений найдены коэффициенты перехода от цельного профиля к перфорированному для стенок, полок, отгибов. Полученные коэффициенты применены в расчете аналитическим методом перфорированных профилей на изгиб с учетом редуцированных характеристик. Полученные результаты работы не противоречат общеизвестным научным представлениям.

## Введение

ЛСТК широко применяется в малоэтажном жилом строительстве, строительстве складов, ангаров, мансард. В последнее время тонкостенным профилям находят новое применение. Примером может служить пешеходный надземный переход пролетом 12 метров, ферма покрытия пролетом 70 метров, построенная в Московской области, девяти этажный жилой дом. К основным преимуществам следует отнести экономию металла, низкий вес, легкость и быстроту монтажа. Однако стальные холодногнутые элементы имеют ряд особенностей работы, таких как наличие зон упрочнения в местах гибки, присущая только тонкостенным элементам потеря устойчивости поперечного сечения. Большой проблемой является отсутствие норм на проектирование в России и отсутствие рекомендаций по расчету перфорированных профилей в Еврокодах. Данное обстоятельство сильно усложняет жизнь конструкторам при проектировании конструкций из термопрофилей [1]. Однако их применение необходимо для избегания наличия мостиков холода в ограждающих конструкциях сооружения.

К преимуществам данной технологии можно отнести:

1. Надежность и продолжительное время жизни. Время жизни зданий определяется в основном сроком службы металлокаркаса, плитных материалов обшивки, утеплителя. При использовании термопрофилей которые изготавливаются из оцинкованной стали с нормой расхода цинка 275 г/кв.м, согласно исследованием British Steel, в соответствие с естественной эмиссией цинка, время жизни конструкций из ЛСТК составляет более 100 лет

2. Малый удельный вес конструкций. Вес 1 кв. м несущего стального каркаса здания находится в пределах 20-24 кг в зависимости от этажности здания. Это преимущество позволяет снизить затраты применяя фундамент плиту мелкого заглубления высотой всего 200мм, расширить возможности строительства на «плохих» грунтах.

3. Эффективное энергосбережение. Применение эффективного утеплителя в каркасах из перфорированных термопрофилей позволяет получать значения коэффициента теплопроводности 0,045 Вт/(м\*к) без учета возможных вариантов утепления по фасаду. Это свойство позволяет значительно снизить издержки при эксплуатации зданий и уменьшить нагрузки на электросети. Высокие теплосберегающие показатели ЛСТК позволяют применять термопрофиль для экономичного строительства даже в условиях крайнего севера.

4. Экологичность. В составе конструкций зданий, построенных с применением

термопрофиля, в качестве обшивки обычно применяются гипсокартонные листы ГЕК13 и стекломagneвые плиты (стекломagneзит), а в качестве утеплителя минеральная вата Роквул ЛайтБатс, являющиеся экологически чистыми. Производство, транспортировка, монтаж и эксплуатация каркасного дома требуют гораздо меньших энергетических затрат, чем традиционные материалы. Спроектированные и построенные с применением Термопрофиля здания не имеют синдрома «больного здания», связанного с излишней влажностью, а внутреннее пространство зданий является безопасной, эргономической и экологически комфортной средой за счет хорошей шумоизоляции и влагонепроницаемости.

5. Быстрый эффективный всепогодный монтаж. Будучи «сухим» способом строительства, монтаж дома из термопрофиля может осуществляться всепогодно. Это особенно важно для инвестора и при строительстве экономичного жилья, когда возврат вложенных средств является определяющим фактором. Сокращение сроков строительства каркасного дома и, как следствие, его стоимости, зависит еще и от степени оптимизации строительного процесса

6. Низкая эксплуатационная стоимость. Здания, построенные с применением термопрофиля, имеют стабильные размеры, хорошо защищены от влияния биологических и температурно-влажностных процессов, долговечны, энергоэкономичны, а при окончании срока службы или при необходимости капитального ремонта не столь затратные, как строения из классических материалов.

7. Не подвержен влиянию биологических процессов. Высокая степень надежности строений из термопрофилей обеспечивается стабильностью размеров стальных профилей, которые не подвержены влиянию биологических и влажностно-температурных процессов в отличие от древесины.

8. Высокая точность при сборке. Самая современная линия по изготовлению термопрофилей полностью автоматизирована и управляется одним человеком. Это исключает человеческий фактор и дополнительные измерительные процессы, что позволяет достичь максимальной точности при сборке панелей и уменьшить в разы время строительства самого дома

9. Не требует тяжелой грузоподъемной техники. Технология ЛСТК позволяет осуществлять строительство в условиях тесной городской и загородной застройки без применения тяжелой грузоподъемной техники. Низкие показатели по удельному весу обеспечиваются эффективными конструктивными решениями в сочетании с применением низколегированной конструкционной стали при изготовлении профилей ЛСТК.

К недостаткам ЛСТК можно отнести:

1. Пожаростойкость. Для обеспечения требуемой несущей способности при пожаре приходится соблюдать определенный пирог ограждающих конструкций, который будет предохранять на определенное время несущие элементы каркаса, выполненные из тонкостенного материала. Помимо этого следует обеспечивать пожаростойкость конструкций использованием современных не горючих материалов, имеющих высшую степень пожаробезопасности и плитным материалом обшивки, количество слоев которой может быть подобрано оптимальным образом под конкретные противопожарные требования.

2. Высокое качество проекта и строительства. Сооружение из ЛСТК имеет огромное количество несущих элементов и узлов, поэтому проект требует тщательной проработки, высокой степени детализации, точности в размерах. Также возведение сооружений из ЛСТК довольно специфично, поэтому требует специалистов с опытом работы с такими конструкциями.

3. Хрупкость термопрофилей. Термопрофили имеют просечки в стенке по всей длине профиля, что сильно снижает ее жесткость и несущую способность. Данный минус приводит к возможной легкой деформации профиля при небрежном хранении, транспортировке или установке.

4. Эксплуатационные расходы. Эксплуатация стальных металлоконструкций дороже эксплуатации железобетонных и каменных конструкций.

5. Экономическая неэффективность при больших пролетах. Сооружения на основе технологии ЛСТК могут иметь лишь небольшие пролеты, максимум примерно 18 метров. Применение ЛСТК в зданиях с динамическими нагрузками, кранами и большими пролетами экономически неэффективно.

Повышенные требования к прочности и надежности при уменьшении материалоемкости создают сложные проблемы анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) и устойчивости тонкостенных конструкций. В связи с этим одной из главных задач механики тонкостенных конструкций является совершенствование методов расчета и проектирования профилей сложной формы с различными законами изменения толщины, отверстиями и накладками.

Современные требования к теплопередаче через наружные стены привели к тому, что полностью кирпичные наружные стены домов не строятся, так как требуемая толщина кирпичной кладки достигла бы на нижних этажах полутора

метров. Следовательно, стеновой материал может быть менее плотным и более теплоэффективным. И этот стеновой материал может быть термопанелью. Термопанелями называются наружные стены, каркас которых составляется из термопрофилей.

Термопрофилями называются гнутые из горячеоцинкованной тонколистовой стали профили, теплопроводность которых существенно ниже теплопроводности традиционных стальных профилей. Хорошие теплотехнические показатели термопрофилей достигаются путем перфорирования стенок профилей.

Современный уровень развития производства характеризуется широким внедрением перфорированных профилей, обладающих конструктивно анизотропными свойствами. Одним из основных требований к конструкциям является разумное соотношение между надежностью и экономичностью. В связи с этим широкое использование анизотропных материалов представляется вполне оправданным. Такие конструкции (в отличие от изотропных), обладают высокой несущей способностью по произвольно выбранным направлениям, что позволяет снизить вес конструкций (обеспечить экономичность) с одновременным увеличением их прочности.

В работе А.П.Филина [2] отмечается, что наличие всевозможных невторостепенных конструктивных особенностей, как, например, отверстия приводят к необходимости их учета. Вместе с тем классические расчетные схемы, методы и алгоритмы расчета оказываются, как правило, в этих случаях малоэффективными.

Основоположниками расчета тонкостенных профилей следует считать профессора С.П.Тимошенко [3], который еще в 1905— 1906 гг. при рассмотрении вопроса об общей устойчивости двутавровой балки исследовал изгибающее действие кручения и вывел формулу угла закручивания балки с одним заделанным концом, которую проверил также опытным путем. В 1910 г. профессор С. П. Тимошенко опубликовал составленное им общее уравнение для угла закручивания двутавровой балки, опертой обоими концами и подверженной по длине своей действию крутящего момента.

В.З.Власов [4] независимо от других авторов в 1936 г. дал наиболее общую теорию расчета любых тонкостенных незамкнутых профилей на совместное действие изгиба и кручения. Исходя из гипотезы о недеформируемости контура поперечного сечения, он установил общий закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении тонкостенного стержня при совместном действии изгиба и кручения. Поэтому закону нормальные напряжения в самом общем случае работы стержня распределяются по сечению пропорционально секториальной

площади.

Г.И. Белым, профессором Санкт-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета, предложен приближенный аналитический метод расчета тонкостенных стержней по деформированной схеме [5]. Решение основано на аппроксимации пространственных форм деформирования в виде линейной комбинацией частных форм: форм, полученных недеформационным расчетом, и форм потери устойчивости. Физическая нелинейность учитывается введением дополнительных пространственных перемещений сечений стержня.

Приведенный анализ литературы показал, что большое внимание уделено теории расчета тонкостенных профилей, в том числе методом конечных элементов. Разработаны методики расчета, виды конечных элементов, отвечающих реальной их работе. Возможно применение тонкостенных конечных стержневых элементов, учитывающих не только чистое, но и стесненное кручение при совпадении и несовпадении центров тяжести и изгиба, наличии или отсутствии эксцентриситетов в узлах элементы. Кроме учитываемых, при расчете обычных стержневых систем, степеней свободы в каждом узле: трех линейных и трех угловых, для конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля учитывается седьмая степень свободы узла - депланации сечения. Таким образом, ТКЭ с узлами в начале и конце имеет 14 степеней свободы.

Также возможно применение обычных стержневых конечных элементов. С учетом того, что теория тонкостенных стержней открытого профиля требует введения седьмой степени свободы, следует обратиться к работе А.В.Перельмутера и А.И.Сливкера [6]. Специальный прием позволяет обойти эти затруднения и вводить в каждый из узлов расчетной схемы не более 6 степеней свободы. Этот прием основан на построении специальной модели - «бистержневой моделью тонкостенного стержня».

Но помимо тонкостенных конечных стержневых и стержневых элементов есть и оболочечные элементы. В расчетной практике применяется моделирование тонкостенного стержня набором оболочечных конечных элементов, с помощью которого можно учесть практически все особенности работы такого сооружения. Детальная расчетная модель позволяет корректно учесть возможность потери местной и общей устойчивости.

В зарубежных работах отмечается большое внимание к вопросу потери устойчивости стержней, сравнение экспериментальных данных с численным и теоретическим методами.

Обзор литературы показал, что хорошо проработаны вопросы потери

устойчивости профилей и методики их расчета. Однако мало внимания уделено рассмотрению влияния касательных напряжений и деформации сдвига в стойках замкнутого сечения. Также остается открытым вопрос влияния перфорации на несущую способность стержней.

В работе были поставлены следующие научно-технические задачи:

1. Разработать оболочечную модель стойки составного замкнутого сечения;
2. Рассмотреть влияние сдвиговых усилий и касательных напряжений на устойчивость замкнутого стержня;
3. Сравнить распределение напряжений в перфорированном и цельном профиле при сжатии и изгибе;
4. Получить коэффициент перехода от цельного профиля к перфорированному;
5. Разработать методику по расчету перфорированных профилей с учетом редуцированных характеристик при изгибе.

Среди аналитических методов расчета тонкостенных стержней в работе был выделен метод, описанный в Еврокоде [7]. В диссертационной работе изложена последовательность теории расчета по Еврокоду и составлен документ в программе Mathcad, который позволяет автоматически найти редуцированные характеристики профиля, предельную нагрузку при сжатии и предельный момент при изгибе. В работе была выполнена серия расчетов профилей по сортаменту компании Балтпрофиль, и получены их характеристики, выведены ряды закономерностей.

Наиболее распространенный численный метод расчета это метод конечных элементов (МКЭ). Применение МКЭ связано с предварительным разбиением континуальной области на конечные элементы какой-либо формы и представлением решения в пределах элемента в виде многочлена с малым конечным носителем. Система уравнений МКЭ непосредственно получается из условия минимума полной потенциальной энергии, т.е. из вариационного уравнения Лагранжа. Расчет конструкций из тонкостенных стержней может выполняться с использованием конечных элементов двух типов: оболочечные и стержневые.

Большой вклад в развитие теории тонкостенных конечных элементов внес А.Р.Туснин [8]. В одной из своих работ он сделал вывод, что наиболее рационально для расчета сложных пространственных конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля использовать стержневые тонкостенные конечные элементы, учитывающих не только чистое, но и стесненное кручение при совпадении и несовпадении центров тяжести и изгиба, наличии или отсутствии эксцентриситетов в узлах.

В работе стояла цель определить значения касательных напряжений при сжатии в стойках различной длины, имеющих составное коробчатое сечение, найти закономерность их распределения, а также влияние их на несущую способность. Методом конечных элементов были смоделированы стойки длиной 150мм, 550мм, 1100мм, 1700мм и одинаковым поперечным сечением. Для подтверждения правильности построенных моделей были сравнены вертикальные перемещения стоек с экспериментальными данными, выполненных Демао Янгом [9], д.т.н сиднейского университета. Результаты показали, что метод конечных элементов дает правдоподобные результаты и может быть успешно использован для расчета тонкостенных профилей. Средняя относительная погрешность составила 26%. Рассмотрение касательных напряжений показало, что среднее значение касательных напряжений остается постоянным не зависимо от высоты стойки, и их значения являются незначительными по сравнению с нормальными напряжениями. Значения нормальных напряжений больше касательных в среднем в 15 раз.

Далее в работе рассматривалось распределение нормальных напряжений при изгибе в цельном профиле и перфорированном. Для этого методом конечных элементов были смоделированы плоские рамы, стойки которых имели высоту 500 мм и сечение с высотой стенки 150мм, 200мм и толщиной металла 0,8; 1,0; 1,2; 1,5; 2,0мм. В отличие от «классического» распределения напряжений при изгибе в цельном профиле, в перфорированном наблюдаются скачки напряжений от сжатия к растяжению в местах перфорации. Показано, что в среднем нормальные напряжения в перфорированном стержне по сравнению с цельным выше на 25%. На основе полученных результатов был вычислен коэффициент, показывающий разницу в распределении напряжений в элементах поперечного сечения профиля. Были выведены средние коэффициенты перфорации для стенок, полок и отгибов различных профилей. Полученные коэффициенты перфорации были использованы при вычислении эффективной ширины элементов поперечного сечения перфорированного профиля, умножая эффективную ширину на данные коэффициенты. В итоге для рассматриваемых перфорированных профилей были вычислены редуцированные характеристики при изгибе. Было получено, что наличие перфорации снижает несущую способность профиля при изгибе в среднем на 17%. Таким образом, в работе был предложен метод расчета перфорированных профилей на изгиб с учетом редуцированных характеристик, используя формулы Еврокода, уточненные полученными коэффициентами.

Достоверность научных результатов подтверждена проверкой выполненных разработок на этапе их практического внедрения. Результаты работы имеют большую практическую значимость для конструкторов при проектировании

конструкций с использованием термопрофилей. Изложенные в работе научные результаты и решения внедрены в процесс проектирования в проектной организации ПНИПКУ «Венчур».

Список публикаций по теме диссертации:

1. Смазнов Д.Н., Шатов Д.С. Конечноэлементное моделирование стоек замкнутого сечения из холодногнутых профилей. // Вестник ВолгГАСУ - 2011г. – 8 с.
2. Шатов Д.С. Конечноэлементное моделирование перфорированных стоек открытого сечения из холодногнутых профилей. // Инженерно-строительный журнал. – 2011.- с 32-35.
3. Шатов Д.С. Потеря устойчивости перфорированных стальных тонкостенных колонн // XXXIX неделя науки СПбГПУ : материалы Междунар. науч.-практ. конф. 2010г.
4. Шатов Д.С. Моделирование работы тонкостенной стальной стойки в САД и оптимизация расчета по Еврокоду // XXXVIII неделя науки СПбГПУ : материалы Междунар. науч.-практ. конф. 2009г.

Перечень апробаций по теме диссертации:

1. Шатов Д.С. Обзор Еврокода 3 часть 1-3 Общие правила. Дополнительные правила для холодногнутых элементов и профилированных листов. // Международный семинар «Использование Еврокодов в Российской Федерации: текущее состояние дел и перспективы». 2011г.
2. Шатов Д.С. Потеря устойчивости перфорированных стальных тонкостенных колонн // XXXIX неделя науки СПбГПУ : материалы Междунар. науч.-практ. конф. 2010г.
3. Шатов Д.С. Моделирование работы тонкостенной стальной стойки в САД и оптимизация расчета по Еврокоду // XXXVIII неделя науки СПбГПУ : материалы Междунар. науч.-практ. конф. 2009г.

## **1. Обзор и анализ литературы, постановка задачи исследования**

Для более полного изложения вопросов актуальности и научной новизны исследований, представленных в работе, для раскрытия их связи с другими исследованиями, приводится обзор литературы. В него, в основном, вошли работы по определению напряженно-деформируемого состояния и численных расчетов тонкостенных профилей.

В первой части главы показана необходимость разработки практической методики расчета. Рассмотрены основные вехи теоретического развития расчета тонкостенных профилей. Отмечено, что теоретические основы уже вполне разработаны и трудно ожидать принципиально новых открытий. Расчет тонкостенных стержней существенно сложнее, чем сплошных. Расчет тонкостенных систем методами теории оболочек сложен и далеко не всегда оправдан. Теории расчета тонкостенных стержней созданные и развитые целым рядом ученых упрощают задачу, но возникают проблемы при расчете сложных несимметричных систем. Весьма эффективным оказывается использование численных методов.

Во второй части главы показано, что решение этих вопросов в последнее время стало возможным благодаря широкому использованию средств вычислительной техники. Было получено много новых результатов, касающихся разработки алгоритмов решения задач по расчету тонкостенных профилей численными методами на ЭВМ. Одним из универсальных методов является метод конечных элементов. Возможно применение тонкостенных конечных стержневых элементов, учитывающих не только чистое, но и стесненное кручение при совпадении и несовпадении центров тяжести и изгиба, наличии или отсутствии эксцентриситетов в узлах элементы. А также возможно применение обычных стержневых конечных элементов. С учетом того, что теория тонкостенных стержней открытого профиля требует введения седьмой степени свободы. Показана методика, которая позволяет обойти эти затруднения. Но помимо тонкостенных конечных стержневых и стержневых элементов есть и оболочечные элементы. В расчетной практике применяется моделирование тонкостенного стержня набором оболочечных конечных элементов, с помощью которого можно учесть практически все особенности работы такого сооружения. Детальная расчетная модель позволяет корректно учесть возможность потери местной и общей устойчивости.

В третьей части главы рассмотрено современное состояние методик и алгоритмов расчета тонкостенных перфорированных профилей, что уже сделано

другими авторами, что в этом вопросе еще неясно и поэтому требует дальнейшего исследования. Хотя в последнее время применение перфорированных профилей увеличивается, некоторые стандарты до сих пор ограничивают их применение из-за недостаточных данных о их работе. Основными направлениями исследования в данной области за последние годы явились следующие:

1. Развитие математического аппарата, который позволяет комплексно оценить напряженно-деформированное состояние (НДС) в общем и частном случаях.

2. Развитие общей теории проектирования, которая связывает упругие деформации с приложенной нагрузкой.

3. Исследование крутильной формы потери устойчивости.

Анализ зарубежных и отечественных исследований показал, что вопросы практического расчета тонкостенных холодноформованных профилей с перфорацией освещены довольно неполно.

Заключением главы является формулировка цели, задач исследования и основных положений, выносимых на защиту.

## **1.1. Исторический очерк развития теории расчета тонкостенных стержней.**

Основоположником теории расчета тонкостенных стержней следует считать профессора С. П. Тимошенко, который еще в 1905—1906 гг. при рассмотрении вопроса об общей устойчивости двутавровой балки исследовал изгибающее действие кручения и вывел формулу угла закручивания балки с одним заделанным концом, которую проверил также опытным путем. В 1910 г. профессор С. П. Тимошенко опубликовал составленное им общее уравнение для угла закручивания двутавровой балки, опертой обоими концами и подверженной по длине своей действию крутящего момента.

В 1909—1910 гг. Бах [10] испытал на совместное действие изгиба и кручения швеллерную балку. На основании этих опытов Бах сделал не совсем правильные выводы. Неравномерность распределения напряжений в швеллере он объяснил несимметричностью сечения.

В 1920—1922 гг. почти одновременно немецкие инженеры Эггеншвиллер, Циммерман и Майер установили понятие о центре изгиба. Но к этому времени профессор Тимошенко уже предложил точный метод нахождения центра изгиба.

Приближенный метод решения той же задачи дал В. Ритц. Вопросом о нахождении центра изгиба и центра кручения занимался также академик Б. Г.

Галеркин.

Во всех указанных работах положение центра изгиба определяется в зависимости только от формы сечения и не учитывается материал, из которого изготовлен стержень. Более точное решение этой задачи получено академиком Л. С. Лейбензоном.

Следующим значительным шагом в теории изучения стесненного кручения являются работы К. Вебера (1924—1926 гг.), который решил задачу в более общем виде. Он обратил внимание на связь между центром изгиба и центром кручения, т. е. той точкой сечения, которая при стесненном кручении не перемещается. Он доказал, что обе эти точки совпадают.

В 1928 г. появилась известная работа Вагнера, содержащая наиболее существенные элементы современной теории стесненного кручения тонкостенных профилей. В работе Вагнер пользуется гипотезой о недеформируемости контура поперечного сечения и впервые устанавливает, что в тонкостенных профилях нормальные напряжения при стесненном кручении распределяются по особому закону, который теперь по терминологии профессора Власова называется «законом секториальных площадей».

В 1932 г. вышла в свет работа В. Н. Беляева — первая в мировой литературе работа, посвященная стесненному кручению тонкостенных стержней с замкнутым профилем. Для упрощения решения задачи В. Н. Беляев предложил считать стенку воспринимающей только касательные напряжения и не работающей на нормальные напряжения. В этой же работе дан анализ статической неопределимости системы, указана наиболее целесообразная основная система и получена удобная система уравнений трех осевых сил для определения лишних неизвестных.

Одна из капитальных работ, посвященная тем же вопросам. Это работа Фридриха и Ганса Блейхов.

Подводя итог предшествующим работам, они дали более общее исследование проблемы стесненного кручения и потери устойчивости от кручения. Они фактически пришли к системе трех дифференциальных уравнений деформаций для случая центрального сжатия, которые вывели энергетическим методом.

Пользуясь в основном предпосылками Вагнера и Блейхов, полную теорию потери устойчивости тонкостенного профиля при центральном сжатии в пределах пропорциональности дал в 1937 г. Каппус. Он рассматривает напряженное и деформированное состояние тонкостенного стержня при чистом и стесненном кручении. Дифференциальные уравнения деформаций он выводит, пользуясь энергетическим методом.

В. З. Власов [11] независимо от других авторов в 1936 г. дал наиболее общую теорию расчета любых тонкостенных незамкнутых профилей на совместное действие изгиба и кручения.

Профессор Власов при решении этой задачи отказывается от понятия «стержень» и рассматривает профиль как тонкостенную пространственную складчатую систему, работающую не только на осевые (нормальные и сдвигающие) силы, но также и на моменты, вызывающие изгиб профиля в поперечном направлении.

Исходя из гипотезы о недеформируемости контура поперечного сечения, он установил общий закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении тонкостенного стержня при совместном действии изгиба и кручения. Поэтому закону нормальные напряжения в самом общем случае работы стержня распределяются по сечению пропорционально секториальной площади. Закон плоских сечений в исследованиях профессора Власова является частным случаем закона секториальных площадей. Им дан также общий метод определения координат центра изгиба и выявлены новые геометрические характеристики сечения тонкостенного профиля; введение этих характеристик в теорию способствует стройному построению ее аналогично соответствующим разделам курса сопротивления материалов.

Профессор Власов [12,13,14] распространил свою теорию и на вопросы пространственной устойчивости тонкостенных стержней и получил ряд новых решений. В частности, им наиболее полно разрешена задача об устойчивости стержней при центральном и внецентренном сжатии и при чистом изгибе, а также об устойчивости плоской формы изгиба тонкостенных стержней при действии поперечной нагрузки. В процессе исследования им попутно была поставлена и разрешена задача о возможности потери устойчивости стержней также и при внецентренном растяжении, если растягивающая сила приложена вне некоторой области, названной профессором Власовым кругом устойчивости. В дальнейшем теория эта была распространена автором также и на вопросы изгибно-крутильных колебаний.

В 1939 г. А. А. Уманский [15], положив в основу исходные гипотезы, несколько отличные от гипотез Власова, изложил вполне общее решение задачи о стесненном кручении стержня с произвольным закрытым профилем.

В 1949 г. были напечатаны работы А. Л. Гольденвейзера, Л. Н. Ставраки, посвященные проблеме устойчивости тонкостенных стержней, работа Б. Л. Абрамяна по кручению призматических стержней с крестообразным поперечным

сечением, работа М. Я. Длугач, посвященная крутильной жесткости тонкостенного стержня, усиленного решеткой.

В 1950 г. вышла работа Л. Н. Ставраки по устойчивости пространственных каркасов из тонкостенных симметричных профилей.

В 1953 г. были напечатаны работы: Г. П. Соболевского, посвященная расчету тонкостенных стержней, усиленных планками, С. А. Амбарцумяна и И. Ф. Образцова — о расчете тонкостенных стержней на устойчивость и А. Ф. Феофанова — по расчету тонкостенных конструкций, предназначенных для проектировщиков авиационных конструкций.

В 1954 г. напечатана работа В. В. Пинаджана по экспериментальному изучению действия бимоента в коротких сжатых стержнях двутаврового сечения и статья И. А. Пыженкова об устойчивости плоской формы изгиба тонкостенных стержней.

В этом же году К. Ф. Ковалевым описывает опыты, которые показали, что стесненное кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля всегда сопровождается значительными деформациями контура сечения, причем форма депланации сечения весьма близка к форме ее при чистом кручении.

В 1955 г. профессор И. В. Урбан [16] объединил теории стержней открытого и замкнутого профилей.

В этом же году были напечатаны работы: Бацикадзе по применению метода последовательных приближений к расчету тонкостенных неразрезных балок на кручение, В. В. Болотина — об устойчивости плоской формы изгиба, М. Д. Борисова — о крутильной жесткости составных тонкостенных стержней с упругими планками и работа Л. Н. Воробьева — о влиянии сдвига срединной поверхности на величину деформаций и напряжений в тонкостенных стержнях открытого профиля.

В 1956 г. напечатаны статьи: Е. Н. Никольского — о деформациях и напряжениях в цилиндрических оболочках и тонкостенных стержнях с неизгибаемым контуром поперечного сечения и М. К. Кожевникова и В. В. Новожилова — о приближенной теории стесненного кручения тонкостенных стержней.

В этом же году была напечатана статья К. Ф. Ковалова и Ю. Я. Ягна, в которой рассматриваются односвязные профили прямоугольного сечения. В результате исследования авторы пришли к выводу, что эти стержни нельзя рассчитывать без учета деформаций контура сечения.

В 1957 г. была напечатана статья профессора Н. И. Безухова и кандидата технических наук О. В. Лужина, в которой авторы указывают, что при динамическом действии нагрузок влияние стесненности депланаций поперечных сечений

тонкостенных стержней оказывается большим, чем при статических нагрузках.

В дальнейшем теорию В.З. Власова совершенствовали выдающиеся ученые.

В работах Джанелидзе Г.Ю. и Пановко Я.Г. [17] рассмотрены основные уравнения, описывающие статическую работу тонкостенных стержней при условии малых перемещений, прикладная теория Власова В.З. для тонкостенных стержней с открытым профилем и прикладная теория Уманского А.А. для тонкостенных стержней с замкнутым профилем.

В работах Г. Ю. Джанелидзе [18,19] дано исследование работы тонкостенных криволинейных стержней и депланационной гипотезы, объединяющей гипотезы Власова и Уманского.

При рассмотрении вопроса о деформации тонкостенного стержня сделан важный практический вывод о возможности разделения деформаций связанных с кручением стержня и деформаций от изгиба и растяжения. Установлено, что действие двух близко расположенных, равных по величине и противоположно направленных крутящих моментов, на тонкостенный стержень эквивалентно действию бимоментов, равного произведению величины крутящих моментов на расстояние между ними. Выявлено несоблюдение принципа Сен-Венана при действии нагрузок, статически эквивалентных нулю, на тонкостенные стержни открытого профиля. Рассмотрена возможность кручения тонкостенного стержня относительно оси, не проходящей через центр изгиба сечения и фиксированной конструктивными особенностями конструкции и показана необходимость разработки практической методики расчета подобных конструкций. Установлено, что при кручении стержня относительно фиксированной оси, не проходящей через центр изгиба, в нем возникают изгибающие моменты. Представлены упрощенные теории, позволяющие в ряде случаев получать приемлемые с инженерной точки зрения результаты.

Александров В.Г. [20] исследовал работу неразрезных тонкостенных балок с открытым профилем и установил, что при эксцентричном приложении нагрузки от вертикального давления крана напряжения в балке несимметричного сечения, из-за стесненного кручения, возрастают до 1,5 раз. При устройстве тормозной балки напряжения в отдельных точках сечения увеличиваются до 1,3 раза, а в некоторых точках сечения меняют знак. Касательные напряжения из-за стесненного кручения в сечении меняются незначительно.

Анучкин А.П. [21] исследует вопросы устойчивости тонкостенных стержней открытого профиля при сжатии. Автор предлагает применять рекомендованные им различные тонкостенные штампованные профили. Установлено, что для

неравнобоких уголков форма потери устойчивости практически всегда крутильная. Для швеллеров крутильная форма потери устойчивости возможна, если отношение момента инерции в плоскости стенки к моменту инерции в плоскости полки меньше 8,9. Для двутавров и составных профилей с двумя осями симметрии и полками, направленными внутрь профиля, такая потеря устойчивости возможна, если это соотношение меньше 1,4. Как правило, колонны и стойки двутаврового и швеллерного сечения обычно имеют соотношение моментов инерции соответственно больше 1,4 и 8,9, поэтому расчет их производят без проверки на закручивание. Элементы связей из угловых, тавровых и крестовых профилей должны обязательно проверяться на закручивание.

Сотрудники лаборатории Власова опубликовали целый ряд экспериментальных исследований - это работы профессора Д. В. Бычкова, профессора А. Р. Ржаницына, А. К. Мрощинского, Н. Г. Добудогло, С. И. Стельмаха и др. Работы Ю. В. Репмана, А. Л. Гольденвейзера и Н. Г. Добудогло, связанные с исследованием устойчивости тонкостенных стержней; А. К. Мрощинского по исследованию складчатых профилей методами теории упругости; А. Р. Ржаницына — исследование работы тонкостенных стержней за пределами упругости и метод произвольных эпюр для определения секториальных характеристик тонкостенного стержня; Д. В. Бычкова, А. К. Мрощинского и С. И. Стельмаха — результаты испытаний различных тонкостенных профилей.

Бычков Д.В. и Мрощинский А.К. [22] кроме теории кручения тонкостенных стержней открытого профиля приводят методику расчета одно и многопролетных тонкостенных балок, дают графики, таблицы и формулы для определений усилий при кручении тонкостенных стержней открытого профиля с различными условиями закрепления по концам. Доступно для проектировщиков изложена теория, достаточно полно изложена экспериментальная проверка этой теории, предложен целый ряд таблиц для облегчения практического приложения этой теории, предложена теорема для определения секториальных геометрических характеристик, указан способ составления и приведен сортамент этих характеристик для применяемых в практике металлических прокатных профилей и выявлены рациональные типы различных профилей, находящихся в условиях изгиба и кручения.

Бычковым Д.В. [23,24,25] рассмотрены теория и практические приемы расчета рамных систем из тонкостенных открытых профилей на кручение. Даны основные теоремы об упругих системах в применении к системам из тонкостенных стержней, методика определения перемещений, построенная по принципу, аналогичному определению таковых в нетонкостенных стержнях, дан вывод уравнений трех и пяти

бимоментов, введено понятие о бимоментных фокусных отношениях, дана методика расчета плоских рам по методу сил, по методу деформаций и по методу бимоментных фокусных отношений, выведено уравнение трех депланаций для расчета неразрезных тонкостенных балок, выявлены приближенные методы расчета балок и рам и, наконец, приведен метод расчета плоских рам по способу последовательных приближений.

Невозможность использования предложенной методики расчета для пространственных систем ограничивает область применения результатов данного исследования.

Расчет пространственных рам из тонкостенных стержней впервые в 1943 г. предложил Б. Н. Горбунов.

Следует отметить, что целая серия работ, посвященных исследованию работы тонкостенного стержня за пределами упругости принадлежит А. И. Стрельбицкой, Р. А. Межлумяна и Я. Г. Пановко.

Горбунов Б.Н. и Стрельбицкая А.И. [26] основное внимание уделили практическому расчету рам из тонкостенных стержней при действии пространственной нагрузки. Авторами разработаны методы расчета рам с открытым и замкнутым сечениями. При расчете тонкостенных стержней с открытым профилем использована теория Власова В.З., при расчете тонкостенных стержней с замкнутым профилем - теория Уманского А. А. Для расчета рам предложено использовать метод деформаций и метод сил. В качестве параметра характеризующего депланацию стержней введено понятие меры депланации. При расчете рам по методу деформаций используется «метод моторных тензоров», реализующий метод перемещений в матричной форме. Рассматривается построение матриц нагрузки и жесткости, составление системы линейных уравнений для нахождения неизвестных перемещений узлов плоских рам. Общее число неизвестных перемещений в узле, принятое в расчетах, семь: три угловых, три поступательных перемещений и депланация. Основным расчетным случаем являются прямоугольные плоские рамы без эксцентриситетов в узлах при одинаковой, для всех сходящихся в узле, стержней мере депланации. Ось стержня располагается по оси центров изгиба, полки стержней, сходящихся в узле, параллельны плоскости рамы. Авторами показано, что в узлах рам выполняется равновесие бимоментов в узле ( $B = 0$ ). В работе представлены расчеты плоских прямоугольных рам при действии нагрузок, вызывающих кручение и деформацию рам из плоскости. Исследовано влияние на работу рам эксцентриситетов в узлах, вызванных несовпадением центров изгиба и тяжести и невозможностью пересечения в одной точке осей нескольких стержней, соединяемых в узле.

В общем случае депланация узла вызывает дополнительные углы поворота и линейные перемещения концов стержней, примыкающих к рассматриваемому узлу.

К достоинствам данной работы следует отнести разработку методики матричного расчета плоских рам из стержней с полками параллельными плоскости рамы без эксцентриситетов в узлах, постановку вопроса о необходимости учета эксцентриситетов в узлах. Отсутствие данных о построении матрицы жесткости стержневой системы при эксцентриситетах в узлах с произвольной ориентацией стержней, не позволяет напрямую использовать результаты исследований при расчете пространственных стержневых конструкций.

Г.И. Белым, профессором Санкт-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета, предложен приближенный аналитический метод расчета тонкостенных стержней по деформированной схеме. Решение основано на аппроксимации пространственных форм деформирования в виде линейной комбинацией частных форм: форм, полученных недеформационным расчетом, и форм потери устойчивости. Физическая нелинейность учитывается введением дополнительных пространственных перемещений сечений стержня.

Этот метод использовался в работах Н.Г. Сотникова, Н.Н. Родикова, С.Н. Пичугина, С.Н. Сергеева, П.А. Пяткина и многих других исследователей.

Исчерпание несущей способности может происходить из-за наступления в процессе нагружения потери местной устойчивости, которая может предшествовать потере общей (пространственной) устойчивости. Изучению вопросов устойчивости пластин посвящены исследования Б.М. Броуде, Е.В. Борисова, Я. Брудки, А.С. Вольмира, И.Б. Ефимова, Э. Стоуэла и других ученых.

Б. М. Броуде делается попытка обобщить уравнения Кирхгофа — Клебша для гибкого стержня сплошного сечения в рамках технической теории тонкостенных стержней открытого профиля.

При действии в сечениях стержня целого комплекса силовых факторов задачи местной устойчивости решаются, как правило, приближенными методами, которые опираются на теорию устойчивости пластинок. Одним из таких методов является метод, основанный на использовании в расчете вместо полного, меньшего (редуцированного) сечения, неэффективные участки которого исключаются из расчета.

Как видно, расчет тонкостенных стержней существенно сложнее, чем сплошных. Расчет тонкостенных систем методами теории оболочек сложен и далеко

не всегда оправдан. Теории расчета тонкостенных стержней, созданные В.З. Власовым, А.А. Уманским, и развитые целым рядом их учеников и последователей упрощают задачу, но и здесь возникают проблемы при расчете сложных несимметричных систем. Весьма эффективным оказывается использование численных методов.

## **1.2. Основы технической теории расчета тонкостенных стержней**

Техническая теория тонкостенных стержней открытого профиля построена на следующих геометрических гипотезах:

- стержень рассматривается как оболочка, обладающая в плоскости поперечного сечения жестким контуром;
- деформации сдвига в срединной поверхности отсутствуют

### **1.2.1. Стесненное кручение тонкостенного стержня открытого профиля**

В задачах о кручении стержня круглого или кольцевого поперечного сечения последние рассматриваются, как жесткие диски. Главным основанием такой предпосылки служат лабораторные испытания.

Аналогичные наблюдения и замеры деформаций показывают, что поперечные сечения некруглой формы в процессе закручивания стержня искривляются - депланируют. И таким образом, оснований для введения гипотезы плоских сечений нет.

Депланация прямоугольного сечения показана на рис. 1.2.1а. На этом рисунке поверхность, которую представляет собой депланированное сечение, состоит из восьми треугольных областей, разделенных осями симметрии прямоугольника и его диагоналями. Знаки депланаций в соседних областях различны: выпуклые области соседствуют с вогнутыми.

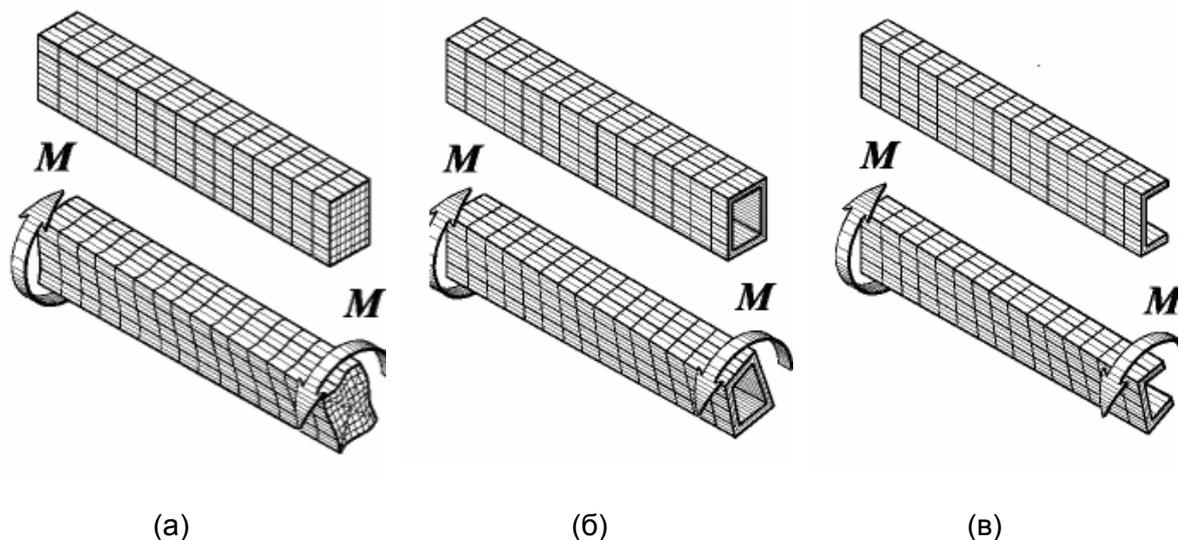


Рис. 1.2.1 Деформация сечений: (а) – сплошного сечения; (б) – закрытого тонкостенного профиля; (в) – открытого профиля

Деформацию сечений тонкостенных стержней закрытого профиля иллюстрирует рис. 1.2.1б, открытого - рис. 1.2.1в. Прямолинейные участки сечений остаются прямолинейными, но выходят из начальной плоскости. Знаки продольных смещений углов различны: один наружу, соседний внутрь.

Если продольные перемещения точек происходят беспрепятственно (свободная деформация), то нормальные напряжения в сечении не возникают. В таком случае кручение называют свободным или чистым. Если же деформация стеснена, то в поперечных сечениях наряду с касательными возникают и нормальные напряжения и кручение носит название стесненного (рис.1.2.2).

Решение задачи о кручении стержня с сечением некруглой формы основано на более общих геометрических предпосылках и сводится к сравнительно сложным уравнениям теории упругости, которые будут рассмотрены в последующих главах.

Итак, под стесненным кручением понимается такое кручение, при котором ограничена деформация сечений. К примеру, для защемленного одним концом тонкостенного стержня (рис. 1.2.2) перемещения для всех точек сечения в заделке равны нулю. По мере удаления от этого сечения деформация и удельный угол закручивания возрастают.

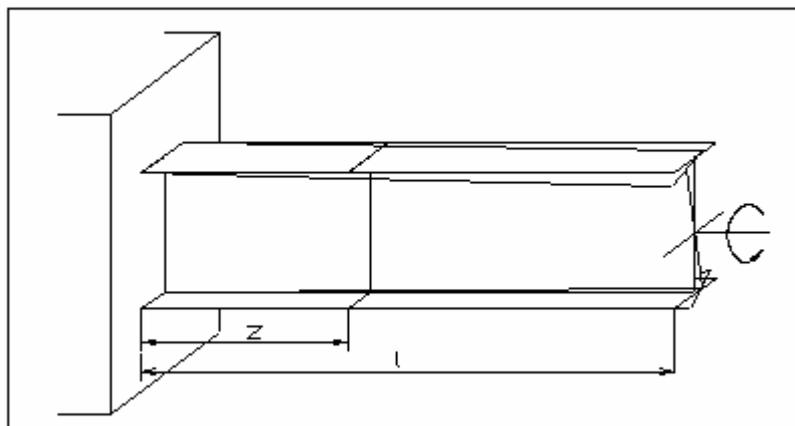


Рис. 1.2.2. Стесненное кручение стержня

В наибольшей степени вышеописанное явление опасно для балок, имеющих несимметричный профиль относительно оси нагружения: несовпадение центра тяжести сечения с центром изгиба вызывает изгибное кручение и деформацию поперечного сечения.

Задача о кручении стержня с математической точки зрения аналогична другой задаче - деформации гибкой упругой мембраны под равномерным давлением. Эта аналогия устанавливает, что, если:

- в жесткой невесомой пластинке вырезать отверстие, повторяющее сечение стержня, подверженного кручению,
- затянуть это отверстие пленкой,
- нагрузить пленку давлением, то
- направление касательного напряжения в рассматриваемой точке сечения стержня совпадает с касательной к линии уровня (параллельной плоскости пластины) изогнутой поверхности пленки в соответствующей точке;
- величина касательного напряжения пропорциональна тангенсу угла между линией наибольшего ската (касательной к пленке перпендикулярной линии уровня) и плоскостью отверстия.

Отмеченные положения мембранной аналогии позволяют:

- установить направление потока касательных напряжений;
- представить картину распределения напряжений;
- выявить опасные точки.

Полученная таким образом информация предоставляет возможность в

отдельных случаях ввести необходимые предпосылки и решить задачу. Часто пользуются готовыми решениями теории упругости. В итоге появляется возможность вычисления напряжений и деформаций, проверки прочности материала и жесткости стержня.

### 1.2.2. Секториальная площадь

Для того, чтобы изучить напряженно-деформированное состояние при изгибном кручении, необходимо подробно знать геометрические свойства сечений и, в частности, так называемые секториальные характеристики тонкостенных профилей

Эти характеристики используются только для тонкостенных стержней и определяются на основе понятия секториальной площади. Определение этих характеристик приведено в следующей главе.

Секториальная площадь представляет из себя удвоенную площадь, ометаемую радиус-вектором  $PA$  при движении точки  $A$  по контур от начала отсчета  $O$  до некоторого значения дуги  $s$ . Если радиус-вектор вращается по часовой стрелке, приращение площади  $ds$  имеет знак плюс, против часовой стрелки – минус. Секториальная площадь является функцией дуги  $s$  и зависит от начала отсчета  $s$  и положения полюса  $P$ , см рис. 1.2.3.

$$\omega = \int_0^s r ds \quad (1.1)$$

где

$w$  – секториальная площадь;

$r$  – радиус-вектор;

$s$  – дуга.

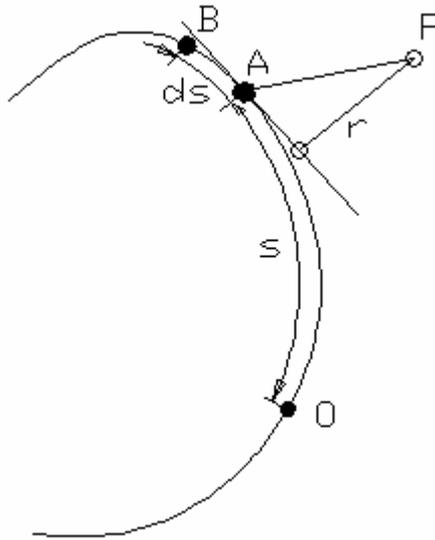


Рисунок 1.2.3 Определение секториальной площади

При переносе полюса секториальная площадь меняется на величины, линейно зависящие от координат  $x$  и  $y$ . Изменение начала отсчета дуги  $s$  (точки  $O$ ) меняет секториальную площадь во всех точках контура на постоянную величину, поскольку меняется нижний предел интеграла.

### 1.2.3. Геометрические характеристики поперечного сечения

Итак, введение нового вида деформации (депланации) и разделение крутильных деформаций для их определения предполагает введение новых геометрических характеристик, базирующихся на секториальной площади. Остановимся более подробно на них, но для начала дадим краткое определение остальных геометрических характеристик, не зависящих от секториальной площади и используемых при принятии гипотезы плоских сечений.

#### Моменты инерции

Вычисление части геометрических характеристик (например, площади, моментов инерции, положения центра тяжести) представляет собой вычисление моментов области ( $\Omega$ ), которую покрывает сечение, то есть вычисление величин вида

$$v_{pq} = \int_{\Omega} y^p z^q dydz \quad (1.2)$$

Например, при  $p = q = 0$  мы получаем площадь сечения  $A$ .

Часто требуется вычисление моментов, нормализованных площадью (A), то есть величин вида

$$\alpha_{pq} = v_{pq} / A \quad (1.3)$$

При этом величины  $\alpha_{01}$  и  $\alpha_{10}$  определяют центр тяжести сечения.

При  $p + q \geq 2$  представляю т интерес центральные моменты

$$\mu_{pq} = \int_{\Omega} (y - \alpha_{10})^p (z - \alpha_{01})^q dydz \quad (1.4)$$

Величины  $\mu_{20}$ ,  $\mu_{02}$ ,  $\mu_{11}$  представляют собой соответственно центральные моменты инерции относительно осей Z, Y и центробежный момент инерции.

### Главные моменты инерции, угол наклона главных осей

Главные моменты инерции вычисляются по формуле

$$I_{u/v} = \frac{(I_y + I_z)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \quad (1.5)$$

Угол наклона главных осей инерции:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{I_{yz}}{I_y - I_{u/v}}\right) \quad (1.6)$$

В последней формуле для нахождения угла оси наибольшего момента инерции в правую часть нужно подставлять  $I_u$ ; для нахождения угла наклона оси наименьшего момента инерции следует подставлять  $I_v$ .

### Радиусы инерции

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}; i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}; i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}}; i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}} \quad (1.7)$$

### Моменты сопротивления

Осевые моменты сопротивления

$$W_{u+} = \frac{I_u}{v_{\max}} ; W_{u-} = \frac{I_u}{v_{\min}} ; W_{v+} = \frac{I_v}{u_{\max}} ; W_{v-} = \frac{I_v}{u_{\min}} , \quad (1.8)$$

где  $u_{\max}$ ,  $u_{\min}$ ,  $v_{\max}$ ,  $v_{\min}$  - соответственно максимальные и минимальные расстояния от точек внешней границы сечения до осей U, V (по одну и другую стороны).

### Полярный момент сопротивления

$$W_{\rho} = \frac{I_y + I_z}{\rho_{\max}} \quad (1.8)$$

где  $\rho_{\max}$  - максимальное расстояние от точек сечения до центра масс.

Величина  $I_y + I_z$  называется полярным моментом инерции.

Ядровые расстояния

$$a_{u+} = \frac{W_{u+}}{A} ; a_{u-} = \frac{W_{u-}}{A} ; a_{v+} = \frac{W_{v+}}{A} ; a_{v-} = \frac{W_{v-}}{A} . \quad (1.9)$$

### Жесткость кручения

Рассмотрим в области  $\Omega$  функцию  $\varphi(y, z)$  (функцию напряжений или функцию Прандтля), которая удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi + 2 = 0 \quad (1.10)$$

и, кроме того,  $\varphi = 0$  на границе области  $\Omega$  в том случае, когда  $\Omega$  является односвязной. В случае многосвязной области (при наличии отверстий) предполагается, что  $\varphi = 0$  на внешней границе области  $\Omega$ , а на каждой из внутренних границ  $(L_i, i = 1, \dots, n)$  функция напряжений постоянна, причем постоянные  $U_i (i = 1, \dots, n)$  таковы, что выполнены соотношения

$$\oint_{L_i} \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds = -2\Omega_i \quad (1.11)$$

где  $\Omega_i$  - площадь области, ограниченной контуром  $L_i$ .

Величина

$$I_t = 2 \left( \oint_{\Omega} \varphi(y, z) dy dz + \sum_{i=1}^n U_i \Omega_i \right) \quad (1.12)$$

называется моментом инерции при кручении.

### Площади сечения при сдвиге

Предположим, что на рис. 1.2.4 изображено сечение, причем оси Y, Z являются главными.

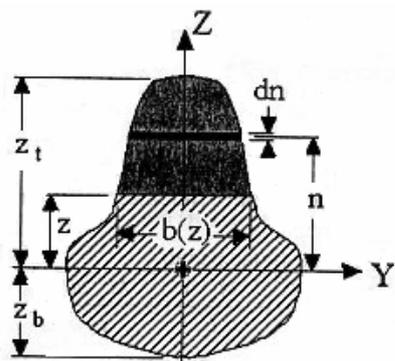


Рисунок 1.2.4 Определение секториальной площади

Пусть

$$Q(z) = \int_z^{z_1} nb(n) dn \quad (1.13)$$

Сдвиговой площадью относительно оси Y называется величина

$$\frac{I_y^2}{\int_{z_b}^{z_1} \frac{Q(z)^2}{b(z)} dz} \quad (1.14)$$

Аналогично определяется сдвиговая площадь относительно оси Z.

### Пластические моменты сопротивления

Обозначим через  $\Omega$  область сечения. Пусть  $\Omega_2$  - часть области  $\Omega$ , лежащая по одну сторону от главной оси U. Пластическим моментом сопротивления сечения при изгибе относительно оси U называется величина

$$W_{pl,u} = 2 \int_{\Omega_2} v d\omega \quad (1.15)$$

Аналогично определяется пластический момент  $W_{pl,u}$  относительно главной оси V.

### Центр изгиба

Существует такая точка, относительно которой момент касательных сил в сечении при поперечном сечении равен нулю. Эта точка называется центром изгиба. Если момент касательных сил в сечении относительно центра изгиба равен нулю, то и момент внешних сил относительно центра изгиба должен быть равен нулю, иначе в брусе возникнут деформации, свойственные не только поперечному изгибу, но и кручению. Поэтому очевидно целесообразно при определении внутренних силовых факторов приводить касательные силы в сечении не к центру тяжести, а к центру изгиба и под крутящим моментом понимать соответственно внутренний момент относительно центра изгиба. Секториально линейные моменты относительно главных центральных осей и полюса, совпадающие с центром изгиба равны нулю. Положение центра изгиба определяется на основании секториальной площади.

Координаты центра изгиба (в главных центральных осях) определяются по формулам

$$y = \frac{1}{J_y} \oint_{\Omega} \omega(y, z) z dy dz \quad ; \quad (1.16)$$

$$z = \frac{1}{J_z} \oint_{\Omega} \omega(y, z) y dy dz \quad , \quad (1.17)$$

где  $\omega(y, z)$  - функция кручения Сен-Венана или функция перемещений. Эта функция является гармонической в области  $\Omega$  ( $\Delta\omega = 0$ ) и на границе удовлетворяет условию

$$\frac{\partial\omega}{\partial n} = z \cdot \cos(ny - y) \cdot \cos(nz) \quad (1.18)$$

и, кроме того,

$$\oint \frac{\partial\omega}{\partial n} ds = 0 \quad (1.19)$$

## Секториальные характеристики

Секториальный момент инерции сечения для сечений

В связи с этим возникают следующие геометрические характеристики стержня:

секториальный статический момент инерции

$$S_{\omega} = \int_F \omega dF \quad \text{см}^4 \quad (1.20)$$

секториально линейные моменты площади

$$U_x = \int_F x \omega dF \quad \text{см}^5 \quad (1.21)$$

$$U_y = \int_F y \omega dF \quad \text{см}^5 \quad (1.22)$$

секториальный момент инерции

$$I_{\omega} = \int_F \omega^2 dF \quad \text{см}^6 \quad (1.23)$$

где  $\omega(y, z)$  - функция кручения Сен-Венана или секториальная площадь.

Ввиду того, что секториальная площадь не является постоянной характеристикой поперечного сечения, характеристики (1.20...1.23) также не будут являться постоянными по сечению, и для вычисления напряжений и деформаций необходимо использовать их текущее значение в рассматриваемой точке.

Секториальные характеристики обычно используются в теории тонкостенных стержней В.З.Власова. Но, как показал Г.Ю.Джанелидзе, приведенные выше формулы, которые применимы к сечениям любой формы, и с точностью  $1 + O(h/\rho)$  соответствуют понятиям секториального статического момента теории Власова, где  $h$  – толщина тонкостенного сечения,  $\rho$  - радиус кривизны.

### 1.2.4. Система дифференциальных уравнений равновесия стержня

Пусть  $\sigma = \sigma(z, s)$  и  $\tau = \tau(z, s)$  соответственно нормальные и касательные напряжения, действующие в точке  $M(z, s)$  поперечного сечения стержня;  $H = H(z)$  - крутящий момент, приходящийся на все поперечное сечение  $z = const$  и получающийся только от разности касательных напряжений в крайних точках стенки.

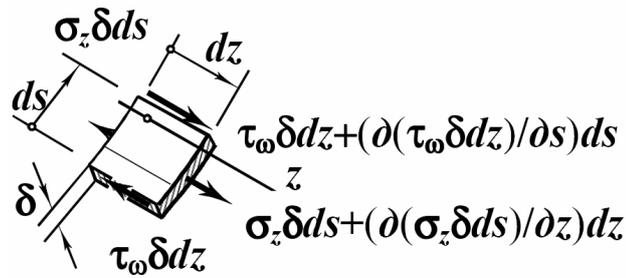


Рис. 1.2.5 Равновесие элементарной пластинки

В [12] выводится следующая система дифференциальных уравнений равновесия стержня:

$$\left\{ \begin{array}{l} EF\zeta'' + q_z + T_K - T_L = 0 \\ -EI_y \xi^{IV} + q_x + \int_{\Omega} \frac{\partial p_z}{\partial z} x ds + T_L' x_L - T_K' x_K = 0 \\ -EI_x \eta^{IV} + q_y + \int_{\Omega} \frac{\partial p_z}{\partial z} y ds + T_L' y_L - T_K' y_K = 0 \\ -EI_{\omega} \theta^{IV} + E_1 I_d \theta'' + m + \int_{\Omega} \frac{\partial p_z}{\partial z} \omega ds + T_L' \omega_L - T_K' \omega_K = 0 \end{array} \right. \quad (1.24)$$

Свободные члены уравнения системы (1.24) определяются внешней поверхностной нагрузкой, дающей в общем случае компоненты по всем трем взаимно перпендикулярным направлениям, и сдвигающими усилиями, действующими вдоль продольных краев стержня. Эти свободные члены представляют собой заданные функции  $p_z = p_z(z, s)$  - проекции интенсивности внешней нагрузки на ось z; эта проекция в общем случае зависит от двух переменных z и s.  $T_K = T_K(z)$  и  $T_L = T_L(z)$  - сдвигающие усилия, приложенные по продольным краям стержня.

Если продольные края стержня свободны от сдвигающих сил и поверхностная нагрузка для произвольной точки (z,s) выражается вектором в плоскости Оху, то  $T_K = T_L = 0$ ,  $q_z = 0$  и система уравнений принимает следующий вид (1.25):

$$\left\{ \begin{array}{l} EF\zeta'' = 0 \\ -EI_y \xi^{IV} + q_x = 0 \\ -EI_x \eta^{IV} + q_y = 0 \\ -EI_{\omega} \theta^{IV} + GI_d \theta'' + m(z) - b(z) = 0 \end{array} \right. \quad (1.25)$$

где  $q_x$  и  $q_y$  - интенсивности погонных поперечных нагрузок;  $m(z)$  -

интенсивность внешнего кртящего момента от поперечных нагрузок  $q_x$  и  $q_y$  относительно центра изгиба;  $b(z)$  - интенсивность внешних распределенных бимоментов.

Первым из уравнений системы (1.30) определяются продольные перемещения  $\zeta(z)$  от продольной сжимающей или растягивающей силы, приложенной по концам стержня и распределенной по сечению равномерно. Второе и третье уравнения относятся к поперечному изгибу стержня. Этими уравнениями и граничными условиями определяются прогибы  $\xi(z)$  и  $\eta(z)$  линии центров изгиба в главных плоскостях стержня.

Последнее из уравнений (1.25) вместе с граничными условиями позволяют определить углы закручивания  $\theta(z)$

Четвертое уравнение системы (1.25) можно представить в виде:

$$\theta^{IV} - k^2 \theta'' = \frac{m(z) - b^I(z)}{EI_\omega} \quad (1.26)$$

где  $k$  - изгибно-крутильная характеристика стержня, обозначенная как

$$k = \sqrt{\frac{GI_t}{EI_\omega}} \quad (1.27)$$

и являющаяся, по сути, характеристическим числом четвертого дифференциального равновесия системы (1.25)

Решение уравнения (1.26) имеет вид:

$$a = f_0(z) + f(z) \quad (1.28)$$

где  $f_0(z)$  - общий интеграл однородного дифференциального уравнения, соответствующего (1.26), равный

$$f_0(z) = Ashkz_1 + Bchkz + Cz + D \quad (1.29)$$

$f(z)$  - частный интеграл уравнения (1.26), зависящий от характера загрузки стержня.

Произвольные постоянные интегрирования  $A, B, C, D$  зависят от граничных условий. Решения уравнения (1.26) с использованием метода начальных параметров получены Власовым В.З. Определены значения реакций в связях на угол закручивания и депланацию для стержня с концами, закрепленными от закручивания

и депланации при заданных единичных углах закручивания и депланации по концам стержня.

### 1.2.5. Касательные напряжения в сечении

Предпосылки о касательных напряжениях :

- в любой точке поперечного сечения касательные напряжения параллельны касательной к профильной линии (рис. 1.2.6);

- по толщине стенки касательные напряжения линейно переменны (рис. 1.2.7).

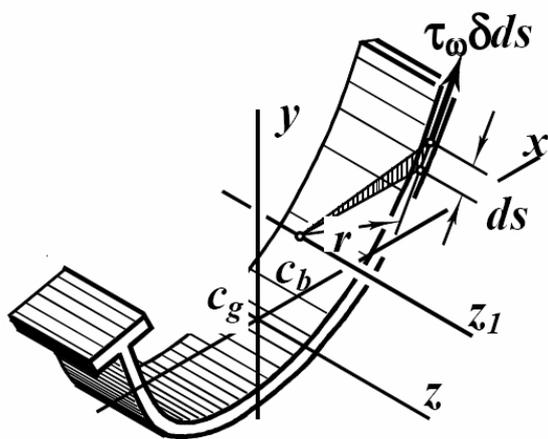


Рис.1.2.6 Распределение касательных напряжений по толщине профиля

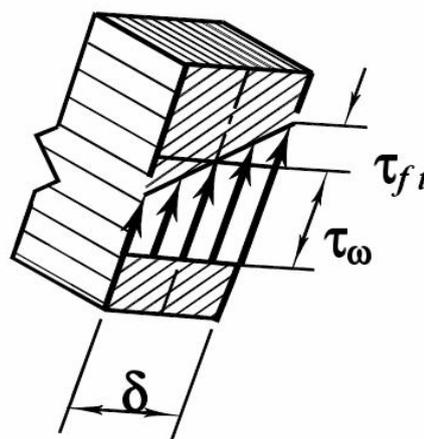


Рис.1.2.7 Кососимметричные касательные напряжения

Остановимся на вычислительных формулах для этих касательных напряжений.

Проинтегрировав второе уравнение (1.25), получаем еще 3 силовых фактора  $Q_y$  - поперечная сила в направлении  $x$ ;  $Q_z$  - поперечная сила в направлении  $y$ ;  $M_\omega$  - секториальный крутящий момент:

$$Q_x = -EI\xi''' = \frac{dM_y}{dz} \quad (1.30)$$

$$Q_y = -EI\eta''' = \frac{dM_x}{dz} \quad (1.31)$$

$$M_\omega = -EI_\omega\theta''' = \frac{dB_\omega}{dz} \quad (1.32)$$

Примечательно, что представленные выше силовые факторы, , связаны дифференциальными связями с силовыми факторами нормальных напряжений с

переменной  $z$ .

Однако секториальный крутящий момент, отвечающий за «кососимметричные» касательные напряжения, является лишь одной из крутящей силовой составляющей. Второй крутящей составляющей является крутящий момент (третье уравнение 1.25)

$$M_{\kappa} = GI_t \theta' \quad (1.33)$$

Таким образом, общий крутящий момент будет складываться из крутящего момента и секториального крутящего момента:

$$M_{o.к.} = M_{\kappa} + M_{\omega} \quad (1.34)$$

И если физический смысл обеих составляющих формулы (1.34) недостаточно ясен, то смысл общего крутящего момента вполне очевиден: это момент, образованный поперечной нагрузкой, приложенной к балке с эксцентриситетом. Математически это выглядит так:

$$q(z) \cdot e = \frac{dM_{o.к.}}{dz} \quad (1.35)$$

Касательные напряжения  $\tau$  в поперечном сечении стержня в общем случае нагружения слагаются из напряжений простого кручения  $\tau_{\kappa}$ , из касательных напряжений поперечного изгиба в обоих направлениях ( $\tau_{изг(y)}$  и  $\tau_{изг(z)}$ ) и вторичных касательных напряжений стесненного кручения  $\tau_{\omega}$ .

$$\tau = \tau_{\kappa} \pm \tau_{изг(y)} \pm \tau_{изг(z)} \pm \tau_{\omega} \quad (1.36)$$

Характерно, что первые три составляющие  $\tau$  в общем случае симметрично и равномерно распределены по толщине профиля (рис. 1.2.6) и соответствуют второй формуле в системе (1.25), а четвертая составляющая, являющаяся следствием стесненного кручения и депланации, - кососимметрично (рис. 1.2.7) и соответствует третьей формуле (1.25)

Остановимся поподробнее на каждой из этих составляющих

Касательные напряжения от крутящего момента  $M_{\kappa}$ : вычисляются по известной из сопротивления материалов формуле:

$$\tau_{\kappa} = \frac{M_{\kappa} \delta}{I_t} \quad (1.37)$$

Касательные напряжения от перерезывающих сил определяются по формуле, предложенной Д.И. Журавским:

$$\tau_{изз(y)} = \frac{Q_y S_z}{I_z \delta} \quad (1.38)$$

$$\tau_{изз} = \frac{Q_z S_y}{I_y \delta}$$

где  $S_x$  и  $S_y$  - статические моменты относительно осей  $x$  и  $y$ .

Секториальные касательные напряжения от изгибно-крутящего момента:

$$\tau_{\omega} = \frac{M_{\omega} S_{\omega}}{I_{\omega} \delta} \quad (1.39)$$

$S_{\omega}$  - секториальный статический момент, определяемый по формуле (1.18)

Отметим, что все составляющие касательного напряжения (кроме...) содержат в знаменателе толщину полки  $\delta$ , являющейся, по сути, коэффициентом пропорциональности, которая берется из формулы, выражающей зависимость между касательным напряжением и сдвигающей силой,

$$T = \tau \delta \quad (1.40)$$

При этом для касательных напряжений, так же как и для нормальных, справедлива оговорка, что знаки слагаемых в уравнении могут быть как положительными, так и отрицательными, в зависимости от физического их смысла, характеризующегося эпюрами внутренних силовых факторов.

Изложенная техническая теория, построенная на более обобщенных предпосылках, обнаруживает качественно новые эффекты в распределении напряжений по сечению и деформировании тонкостенного стержня открытого профиля. В результате она позволяет прогнозировать напряженно-деформированное состояние элементов конструкций на более высоком теоретическом уровне.

Теоретические разработки Власова В.З. подтверждены многочисленными экспериментами, что позволяет использовать эту теорию для построения инженерной методики расчета тонкостенных стержней открытого профиля.

### **1.3. Устойчивость тонкостенных стержней**

#### **1.3.1. Дифференциальное уравнение устойчивости 2-го рода для стержня с недеформируемым профилем**

Для стержня с недеформируемым профилем, находящийся в равновесии под

действием произвольных продольных и поперечных нагрузок, потеря устойчивости не связана с появлением новых форм равновесия, так как и до потери устойчивости, стержень изгибается, закручивается и деформируется. Следовательно, речь идет о потере устойчивости 2-го рода. Уравнения (1.50) являются наиболее общими уравнениями устойчивости тонкостенного стержня:

$$\left. \begin{aligned} EI_y \xi^{IV} - [N(\xi' + a_y \theta')] + (M_x \theta)'' &= 0; \\ EI_x \eta^{IV} - [N(\eta' - a_x \theta')] + (M_y \theta)'' &= 0; \\ EI_\omega \theta^{IV} - GI_d \theta'' - [(r^2 N + 2\beta_y M_x - 2\beta_x M_y + \beta_\omega B) \theta'] + \\ + [q_x(e_x - a_x) + q_y(e_y - a_y)] \theta - a_y (N \xi')' + a_x (N \eta')' + M_x \xi'' + M_y \eta'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.50)$$

### 2.1.2. Дифференциальное уравнение устойчивости 1-го рода для стержня с недеформируемым профилем в случае центрального и внецентренного сжатия

Если поперечная нагрузка и реакции тонкостенного стержня проходят через линию центров изгиба, то до потери устойчивости стержень не испытывает кручения, деформация отсутствует, она проявляется только в результате потери устойчивости. Таким образом, потеря устойчивости будет характеризоваться появлением качественно нового деформированного состояния, новой формы равновесия, и уравнения (1.50) при бимоменте  $B = 0$  будут описывать явление потери устойчивости 1-го рода.

В случае центрального сжатия, когда сила приложена в центре тяжести сечения, но центр тяжести не совпадает с центром изгиба, уравнения устойчивости будут такими:

$$\left. \begin{aligned} EI_y \xi^{IV} + F \xi'' + F a_y \theta'' &= 0; \\ EI_x \eta^{IV} + F \eta'' - F a_x \theta'' &= 0; \\ F a_y \xi'' - F a_x \eta'' + EI_\omega \theta^{IV} + (r^2 F - GI_d) \theta'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.51)$$

Дифференциальными уравнениями (1.50) и условиями закрепления стержня по концам определяются все формы потери устойчивости стержня при его центральном сжатии. В каждое из уравнений (1.50) входят одновременно поступательные перемещения  $\xi$ ,  $\eta$  и углы закручивания  $\theta$ . Это свидетельствует о том, что если центр изгиба не совпадает с центром тяжести, то эйлеровская изгибная форма потери устойчивости при центральном сжатии становится невозможной.

Уравнения (1.50) характеризуют наличие одновременно изгиба и кручения при потере устойчивости (изгибно-крутильную форму потери устойчивости). Следует отметить, что для несимметричного тонкостенного стержня, в котором центр изгиба не совпадает с центром тяжести, критическая сила, соответствующая изгибно-крутильной форме потери устойчивости, всегда меньше минимальной эйлеровской критической силы. В частном случае, если центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения, в этом случае имеем или чисто изгибную, или чисто крутильную форму потери устойчивости.

В случае внецентренного сжатия уравнения устойчивости (1.50) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} EI_y \xi^{IV} + F \xi'' + (M_x + Fa_y) \theta'' &= 0; \\ EI_x \eta^{IV} + F \eta'' + (M_y - Fa_x) \theta'' &= 0; \\ (M_x + Fa_y) \xi'' + (M_y - Fa_x) \eta'' + EI_\omega \theta^{IV} + \\ + (r^2 F + 2\beta_x M_y - 2\beta_y M_x - GI_d) \theta'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

При внецентренном сжатии чисто изгибные и чисто крутильные формы потери устойчивости имеют место, если сила приложена в центре изгиба. В этом случае уравнения (3.50) распадаются на три самостоятельных уравнения

$$\begin{aligned} EI_y \xi^{IV} + F \xi'' &= 0; \\ EI_x \eta^{IV} + F \eta'' &= 0; \\ EI_\omega \theta^{IV} + [F(r^2 + 2\beta_x a_x + 2\beta_y a_y) - GI_d] \theta'' &= 0. \end{aligned}$$

Первые два уравнения определяют изгибные формы потери устойчивости и дают эйлеровские критические силы; третье уравнение определяет крутильную форму потери устойчивости, при которой поперечные сечения стержня поворачиваются вокруг центра изгиба. Расчетной будет минимальная из трех критических сил.

### 1.3.2. Обобщенные силы при изгибе и стесненном кручении тонкостенных профилей

Выражение нормальных напряжений можно записать:

$$\sigma = \frac{P(x)}{A} - \frac{M_y(x)}{I_y} z - \frac{M_z(x)}{I_z} y + \frac{B(x)}{I_\omega} \omega \quad (1.53)$$

Это выражение отличается от используемого в элементарной теории лишь

наличием  $B(x)$ , который представляет собой новую обобщенную силу, называемую изгибно-крутящим бимоментом. Появление бимомента естественно, так как мы отказались от гипотезы плоских сечений.

Если при использовании гипотезы плоских сечений в каждом сечении имелись три обобщенных перемещения  $\xi(x), \eta(x)$  и  $\zeta(x)$ , через которые выражались перемещения всех точек поперечного сечения, то в рассматриваемой теории к упомянутым обобщенным перемещениям прибавляется еще четвертое  $\vartheta(x)$ , с которым связано не только закручивание стержня, но и деформация поперечного сечения.

Бимоменты характеризуют величины отступления нормальных напряжений от полученных по гипотезе плоских сечений, тогда как распределение этих напряжений по поперечному сечению характеризуется законом секториальных площадей.

Выражение для определения касательных напряжений в частном случае, когда продольные усилия отсутствуют:

$$\tau_{\theta} = \frac{N_y S_y}{I_y} + \frac{N_z S_z}{I_z} - \frac{B' S_{\omega}}{I_{\omega}} \quad (1.54)$$

Величина  $B'$  представляет собой часть крутящего момента, вызывающего равномерно распределенные по толщине профиля касательные напряжения.

В задачах изгиба и растяжения граничные условия записываются обычным образом. В задаче о кручении угол поворота  $\vartheta(x)$  определяется дифференциальным уравнением четвертого порядка. Поэтому необходимо составить четыре граничных условия.

### **Кручение стержней открытого профиля с перфорацией**

Если у профилей с относительно малыми отверстиями можно не учитывать кручение, то у профилей с большим размером существенно уменьшается жесткость на кручение и в этом случае могут возникнуть значительные дополнительные нормальные напряжения, с которыми приходится считаться.

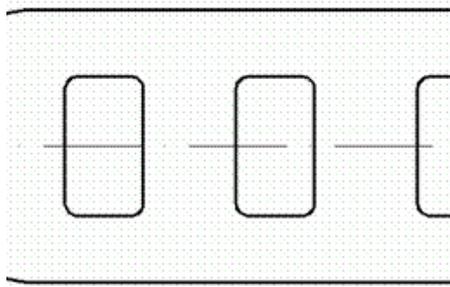


Рис. 1.3.1 Общая схема

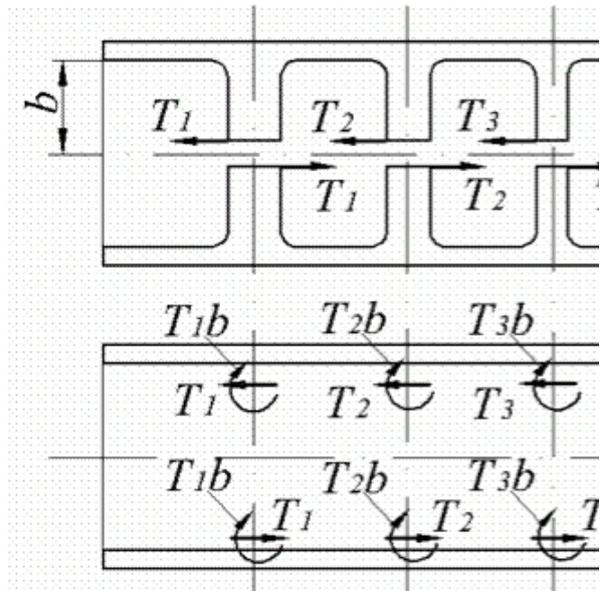


Рис. 1.3.2 Расчетная схема и усилия

Поперечные участки между отверстиями при закручивании профиля изгибаются, получая в сечении по диаметральной плоскости точку перегиба. Если разрезать перемычки по диаметральной плоскости (рис. 1.3.2 а), то усилия взаимодействия сведутся лишь к перерезывающим силам  $T_j$ . Так как протяженность перемычек по длине профиля мала, то можно считать, что они прикладывают к профилю сосредоточенные силы  $T_j$  и моменты  $M_j = T_j b$ , как показано на рисунке. Неизвестные усилия взаимодействия необходимо определить, исходя из условия, что относительное перемещение в месте разреза перемычки отсутствует.

Относительное перемещение в месте разреза перемычки складывается из следующих величин:

- а) относительного смещения краев профиля в местах присоединения перемычки к профилю вследствие деформации сечения;
- б) относительного смещения вследствие изгиба перемычки и участка вдоль профиля; при расчете следует учитывать и перемещения от сдвига для перемычки.

Продольное перемещение вдоль оси  $Ox$  вследствие деформации сечения определяется как:

$$u_1(x, s) = -\mathcal{G}'(x) \omega(s), \quad (1.55)$$

Таким образом, расхождение кромок разреза вследствие закручивания определим по выражению

$$\delta u_1 = -\mathcal{G}'(x)[\omega(s_L) - \omega(s_K)] = -\mathcal{G}'(x)\Omega, \quad (1.56)$$

Для определения угла поворота  $\mathcal{G}(x)$  и величины  $\delta u_1(x_j)$  необходимо воспользоваться преобразованной формулой:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x) = & \frac{1}{EI_\omega} \int_0^x \int_0^x \int_0^x m(x) dx dx dx + \frac{M_{кр}^{(0)} x^3}{6EI_\omega} + \\ & + \frac{1}{2} \mathcal{G}''(0) x^2 - \mathcal{G}(0) + \Omega \sum_j \bigg|_{x=x_j} \frac{T_j (x-x_j)^3}{6EI_\omega}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Неизвестные  $\mathcal{G}''(0)$  и  $\mathcal{G}(0)$  определяются из аналогичных граничных условий.

Для определения смещения  $\delta u_2(x_j)$  от изгиба перемычек и бортового участка необходимо произвести расчет балки с консолями (рис. 1.3.3).

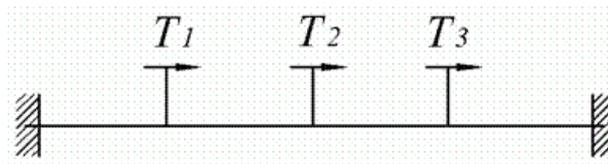


Рис. 1.3.3 Расчет балки с консолями

Расчет такой балки выполняется известными способами, и можно получить

$$\delta u_2(x_j) = \sum_{g=1}^n \alpha_{jg} T_g; \quad j=1,2, \dots, n, \quad (1.58)$$

а расхождение сечений перемычек вследствие изгиба

$$\delta u_2(x_j) = 2u_2(x_j). \quad (1.59)$$

Так как суммарное расхождение должно быть равно нулю, то

$$\mathcal{G}'(x_j)\omega(s_L) = \sum_{g=1}^n \alpha_{jg} T_g; \quad j=1,2, \dots, n, \quad (1.60)$$

Подставляя в уравнения (8.60) выражение (8.57), после определения из граничных условий величин  $\mathcal{G}''(0)$  и  $\mathcal{G}(0)$ , можно из полученной системы уравнений определить все неизвестные силы  $T_g$ . После этого находят напряжения от кручения как во всем профиле, так и дополнительные нормальные напряжения от стесненного кручения, изгиба перемычек и бортовых участков профиля.

### 1.3.3. Дифференциальное уравнение устойчивости для стержня с деформируемым профилем

При рассмотрении задачи устойчивости центрально сжатых стержней было установлено, что когда сжимающая сила достигает некоторого значения, первоначально прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой. Наряду с прямолинейной формой равновесия становятся возможными и бесчисленные изгибные формы равновесия: изгиб происходит в плоскости наименьшей жесткости. Потеря устойчивости формы равновесия возможна и при других видах нагрузки. Например, при изгибе полосы в плоскости ее наибольшей жесткости, когда нагрузка достигает некоторой величины, наряду с плоской формой изгиба становятся возможными и другие формы равновесия: стержень изгибается в поперечной плоскости и закручивается.

Для решения задач пространственной устойчивости стержней необходимо составить дифференциальные уравнения равновесия в деформированном состоянии.

Рассматривая задачи сложного изгиба стержней, установили, что при изгибе стержня появляется дополнительная интенсивность поперечной нагрузки. Также можно вычислить и дополнительные интенсивности поверхностной нагрузки на единицу площади поверхности стержня.

В задачах, представляющих наибольший интерес, можно считать внешнюю нагрузку приложенной таким образом, что вплоть до потери устойчивости кручение отсутствует.

Решение в общем виде дифференциальных уравнений сложного пространственного изгиба и кручения тонкостенных профилей требует использования специальных приемов. Не будем выписывать эти уравнения в общем виде.

Рассмотрим простейший случай симметричного относительно оси  $OZ$  профиля, дополнительно предположив, что на стержень действует сжимающая сила  $P$  и постоянный по длине изгибающий момент в плоскости  $xOZ$ . В этом случае дифференциальные уравнения можно преобразовать к виду

$$\left. \begin{aligned} EI_z \eta^{IV}(x) + P \eta''(x) + (-z_A P + M_0) \vartheta''(x) &= 0; \\ EI_y \zeta^{IV}(x) + P \zeta''(x) &= 0; \\ (-P z_A + M_0) \eta''(x) + EI_\omega \vartheta^{IV}(x) + \\ + (2\beta_z M_0 + r^2 P - C) \vartheta''(x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.61)$$

Дифференциальное уравнение для  $\zeta(x)$  совпадает с дифференциальным уравнением устойчивости центрально сжатого стержня. Остальные два дифференциальных уравнения свидетельствуют о том, что при некоторых условиях возможна потеря устойчивости из плоскости симметрии с одновременным закручиванием стержня. Какой форме потери устойчивости соответствует наименьшее значение эйлеровой силы, можно определить только на основании расчета.

#### 1.4. Численные способы решения задач применительно к тонкостенным профилям. Современное состояние методик

В настоящее время в литературе все большее внимание уделяется исследованию вопросов устойчивости тонкостенных профилей под действием нагрузок, отличающихся от классических значительной сложностью по своему характеру. Естественным при этом является стремление учесть всевозможные факторы, оказывающие влияние на величины критических нагрузок, такие, как комбинированное действие нагрузок, анизотропия и неоднородность материала, различные граничные условия и т.д. Решение этих вопросов в последнее время стало возможным благодаря широкому использованию средств вычислительной техники. На этом пути было получено много новых интересных результатов, касающихся оценки изгиба и устойчивости профилей и разработки алгоритмов решения подобного рода задач.

Однако многие задачи остаются нерешенными до сих пор. К настоящему времени накоплен определенный материал по расчету тонкостенных профилей при различных видах нагружения, однако он недостаточен для удовлетворения растущих запросов практики.

Данных для расчета тонкостенных профилей в литературе приводится очень мало, причем большинство задач решаются в линейной постановке.

Так, ряд актуальных проблем по моделированию и по методам расчетов тонкостенных оболочек сформулирован академиками: Образцовым, Самарским

А.А.[27, 28]. По словам авторитета в области моделирования и численных методов Самарского А.А. [27], по-прежнему актуальной задачей остается задача создания эффективных моделей, разработки методов их реализации на ЭВМ, развитие теории численных методов. Академик Образцов И.Ф. [28] считал, что основная проблема при рассмотрении сложных конструкций - создание эффективных математических моделей деформирования, которые не только обеспечивают выполнение заданных требований к информативности и точности исследований, но и одновременно являются экономичными способствующими, в частности, минимизации затрат.

Встает вопрос о существовании универсальных, пригодных для решения, численных методов исследования широкого круга практически важных задач. Относительно существования универсальных численных методов известно, что не существует ни одного метода, обладающего бесспорным преимуществами при решении, бесконечного разнообразия технических проблем [29]. Также актуален вопрос, связанный с выбором наиболее эффективного численного метода для решения поставленной задачи. Каждый из численных методов обусловлен необходимостью решения определенного круга задач, имеет свою историю становления и этапы последующего развития с целью расширения области его применения.

МКЭ является синтезом энергетических методов, представлений о конечных разностях и структурном моделировании при помощи вычислительных машин.

По одним сведениям первой работой, в которой фактически был реализован МКЭ, была работа Хренникоффа А., 1941 г. [30], по другим - статья, опубликованная Курантом в 1943 г. [31], а название "метод конечных элементов" вводится Клафом в 1956 г.

В связи с развитием вычислительной техники интенсивно развиваются исследования по расчету тонкостенных профилей численными методами на ЭВМ. Одним из универсальных методов является метод конечных элементов. По этому методу опубликовано очень большое число работ, в том числе известные монографии и работы Бате К., Вилсона Е., Голованова А.И., Корнишина М.С., Зенкевича О., Моргана К., Постнова В.А., Рикардса К. и других [32,33,34,35,36,37,38,39].

Методика численного расчета разработана Постновым В.А. (38) и Хархуримом И.Я. Предложен конечный элемент тонкостенного стержня открытого профиля для численного расчета. Деформация в общей и местной системе координат считается одинаковой. Разработанная матрица может применяться только при расчете плоских перекрытий. Использование предложенной матрицы жесткости для расчета

пространственных конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля (узлы имеют по 7 степеней свободы) с различными узловыми сопряжениями при наличии эксцентриситетов в узлах невозможно.

Применение МКЭ связано с предварительным разбиением континуальной области на конечные элементы какой-либо формы и представлением решения в пределах элемента в виде многочлена с малым конечным носителем. Система уравнений МКЭ непосредственно получается из условия минимума полной потенциальной энергии, т.е. из вариационного уравнения Лагранжа.

Наиболее распространенный метод расчета это метод конечных элементов (МКЭ). МКЭ имеет ряд важных преимуществ, определивших его популярность:

- свобода в размещении узловых точек;
- неограниченные возможности совершенствования аппроксимаций с учетом тех или иных физических особенностей задачи;
- гибкость и удобство приближения сложных формулировок граничных условий;
- возможность сочетания в одном ансамбле конечных элементов различных типов, причем имеется возможность сгущения сетки в местах ожидаемой концентрации напряжений;
- возможность решения задач с непрерывными или частными изменениями свойств среды;
- большой выбор средств для учета нелинейных эффектов и анизотропии;
- простота используемого математического аппарата;
- большое количество коммерческих пакетов программ и, как следствие, физическая наглядность.

Среди работ зарубежных исследователей встречается множество посвященных сравнению экспериментальных данных с расчетами методом конечных элементов [40,41,42,43,44,45,46,47,48,49]. Как правило, результаты хорошо согласуются, что говорит о возможности применения МКЭ для анализа работы тонкостенных конструкций. Среди зарубежных исследователей отдельно следует выделить Хэнкок Г.Дж [50] и Шафер Б.В. [51].

Отечественными исследователями также ведется работа по поиску оптимальных схем МКЭ, разрабатываются методы внедрения расчета тонкостенных конструкций МКЭ с помощью отечественных программ [52]. Д.Н.Смазнов в своих работах [53,54] рассматривает устойчивость и формы потери устойчивости холодногнутых стоек из высокопрочной стали, дает рекомендации по оптимальным

шагам разбиения элементов, даны практические рекомендации для конструирования новых типов поперечных сечений с рациональным расположением жестких вставок [55].

Рассмотрим основные принципы метода конечных элементов на примере случая для плоской стержневой задачи. Расчет конструкций из тонкостенных стержней может выполняться с использованием конечных элементов двух типов: оболочечные и стержневые.

#### Оболочечные конечные элементы.

Принцип действия метода конечных элементов применительно к оболочечным схемам: модель разбивается на узлы и конечные элементы, при этом каждый узел имеет 6 степеней свободы. Вся нагрузка также сводится к шести компонентам для каждого узла, соответствующим шести степеням свободы; составляется матрица жесткости; разрешается глобальная система дифференциальных уравнений, результатом чего являются перемещения по 6 направлениям для каждого узла. После этого происходит переход к напряжениям в каждой точке элемента-пластины (в стержневой модели - к внутренним усилиям, в чем и состоит основное отличие принципа). Одним из подвидов оболочечных КЭ является тонкостенные КЭ.

#### Тонкостенные конечные элементы

Поперечное сечение тонкостенного стержня, в отличие от обычного стержня, имеет не 6, а 7 степеней свободы, характеризующихся соответственно не шестью, а семью степенями свободы. Соответственно теория МКЭ не может быть применена к подобного вида стержням и стержневым системам. Иными словами, двухузловой стержневой конечный элемент будет иметь не по 6 степеней свободы в каждом узле, а по 7. Соответственно в матрице жесткости появятся дополнительные компоненты, а в матрицах-столбцах узловых перемещений и узловых нагрузок добавится по одному компоненту на каждый узел: соответственно относительной деформации узла и узлового бимоменты.

#### Стержневые конечные элементы

Несмотря на то, что в «классических» стержневых конечноэлементных моделях присутствует не 7, а всего лишь 6 степеней свободы в каждом узле, что, казалось бы, является неприемлемым для расчета тонкостенных стержней открытого профиля, использование обычных стержневых конечных элементов представляется возможным. Это достигается путем построения так называемой бистержневой модели, о которой изложено далее.

Рассмотрим вначале метод конечных элементов с использованием

тонкостенный конечных элементов.

Большой вклад в развитие теории тонкостенных конечных элементов внес Туснин А.Р. Наиболее рационально для расчета сложных пространственных конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля использовать стержневые тонкостенные конечные элементы, учитывающих не только чистое, но и стесненное кручение при совпадении и несовпадении центров тяжести и изгиба, наличии или отсутствии эксцентриситетов в узлах.

При использовании МКЭ конструкция из тонкостенных стержней открытого профиля делится на отдельные прямолинейные тонкостенные конечные элементы (далее ТКЭ), соединяемые друг с другом в узлах. Кроме учитываемых, при расчете обычных стержневых систем, степеней свободы в каждом узле: трех линейных и трех угловых, для конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля учитывается седьмая степень свободы узла - депланации сечения. Таким образом, ТКЭ с узлами в начале и конце имеет 14 степеней свободы.

Расчет конструкции сводится к определению неизвестных перемещений узлов, по которым затем определяются усилия в элементах. Для определения перемещений необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$R_0 U = P,$$

где  $R_0$  - матрица жесткости конструкции в общей системе координат с учетом граничных условий;  $U$  - вектор перемещений узлов конструкции;  $P$  - вектор нагрузки с учетом граничных условий.

Матрица жесткости конструкции  $R_0$  формируется из матриц жесткости отдельных стержней.

В работе Туснина А.Р. рассматривается влияние кручения на прочность, устойчивость и жесткость изгибаемых, сжатых и внецентренно сжатых элементов. Изучается влияние на работу тонкостенных стержней открытого профиля граничных условий и нагрузок.

Рассматриваются вопросы численного расчета тонкостенных стержней открытого профиля с использованием конечных элементов оболочки, разрабатываются матрицы жесткости тонкостенных конечных элементов для стержней открытого профиля при совпадении и несовпадении центров тяжести и изгиба, при отсутствии и наличии эксцентриситетов в узлах. Исследуется влияние различных узловых сопряжений в пространственных системах на работу конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля. Изучается напряженно-

деформированное состояние мембранных конструкций с эксцентричным креплением мембраны к тонкостенному опорному контуру открытого профиля.

Тусниным А.Р. установлены следующие закономерности:

- определены четыре основных типа узловых соединений и коэффициенты преобразования деформации стержней в зависимости от конструкции узлов сопряжения тонкостенных стержней открытого профиля.

- необходимость совместного учета перемещений от изгиба и перемещений, обусловленных кручением, для оценки жесткости стержневых конструкций.

- что в качестве критерия исчерпания несущей способности балки при действии крутящих нагрузок следует использовать линейные перемещения, а не угол закручивания относительно продольной оси

- если при изгибе и кручении балки напряжения от изгиба больше, чем напряжения от кручения, то при достижении нагрузкой критического значения происходит резкое увеличение горизонтальных перемещений верхней полки балки и угла закручивания.

- для балок швеллерного сечения несущая способность зависит не только от величины, но и от знака крутящего момента, что обусловлено влиянием на работу конструкции суммарных сжимающих напряжений в верхней полке.

- при упругой работе материала крутящий момент практически не влияет на устойчивость таких стержней. При развитии в стержне пластических деформаций устойчивость сжатых и внецентренно-сжатых стержней с ростом крутящего момента снижается. Установлена возможность учета кручения путем уменьшения расчетного сопротивления на величину нормальных секториальных напряжений в наиболее сжатом волокне.

- Установлено, что секториальные нормальные напряжения составляют до 50% и более от суммарных напряжений в сечении, что практически подтверждает необходимость учета стесненного кручения.

Но следует отметить, что Тусниным А.Р. приводятся и следующие замечания:

Расчет конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля может выполняться с использованием конечных элементов оболочки. Это требует тщательного выбора сетки разбиения конструкции. При этом число узлов и элементов возрастает по сравнению со стержневой аппроксимацией на несколько порядков.

Наиболее рационально для расчета сложных пространственных конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля использовать стержневые тонкостенные конечные элементы, учитывающих не только чистое, но и стесненное кручение при совпадении и несовпадении центров тяжести и изгиба, наличии или отсутствии эксцентриситетов в узлах.

Поэтому следует обратиться к работе А.В. Перельмутера и А.И. Сливкера где приводится описание так называемой бистержневой модели и показана зависимость угла закручивания с мерой деформации.

Подавляющее большинство расчетных программных комплексов, основанных на методе конечных элементов, позволяют учитывать до 6 степеней свободы. В то же время, теория тонкостенных стержней открытого профиля требует введения седьмой степени свободы в примыкающих к тонкостенным стержням узлах. Эта седьмая степень свободы отвечает деформационной составляющей узлового перемещения

Специальный прием позволяет обойти эти затруднения и вводить в каждый из узлов расчетной схемы не более 6 степеней свободы. Этот прием основан на построении специальной модели - «бистержневой моделью тонкостенного стержня».

При построении бистержневой модели, оперирующей шестью степенями свободы в узлах, удобно исходить из энергетических соображений. С этой целью приведем выражение для потенциальной энергии деформации  $E$ , накапливаемой в тонкостенном стержне при его закручивании. Имеем

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l [E I_{\omega} (\theta_x'')^2 + G I_x (\theta_x')^2] dx$$

В качестве предлагаемой бистержневой модели рассмотрим механическую систему, состоящую из двух стержней одинаковой длины  $l$ , которые назовем основным и фиктивным стержнями.

Оба эти стержня рассматриваются в классической постановке, то есть в рамках теории Бернулли-Эйлера для стержней сплошного сечения, и поэтому не требуют введения в расчетную схему каких-либо дополнительных степеней свободы.

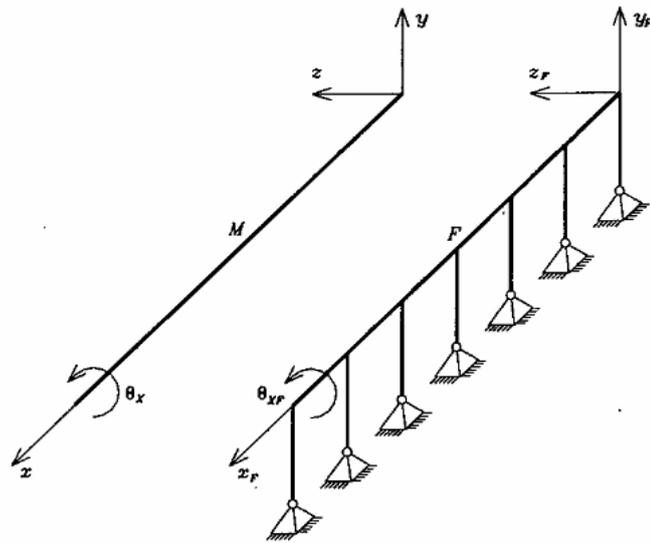


Рис. 1.4.1 Основной и фиктивный стержни

Между перемещениями поперечных сечений стержней (основного и фиктивного) устанавливаем связь, обеспечивающую равенство углов поворотов сечений этих двух стержней относительно осей  $X$  и  $X_F$ , то есть

$$\theta_x = \theta_{x_f}.$$

Кроме того, на перемещения фиктивного стержня накладываем внешние связи, препятствующие смещениям точек его продольной оси в осевом направлении (вдоль оси  $X_F$ ) и в направлении одной из главных осей инерции (связь препятствует перемещениям по направлению оси  $Y_F$ ). Линейные перемещения фиктивного стержня вдоль другой главной оси свяжем с углом закручивания  $Ox_F$  соотношением

$$w_F = r \theta_{x_f}$$

где через  $w_f$  обозначено перемещение центра тяжести сечения фиктивного стержня в направлении оси  $Z_f$  а  $r$  — некоторая константа.

На механическом уровне наложенные на фиктивный стержень внешние связи интерпретируются как подкрепление фиктивного стержня частотомом абсолютно жестких рычагов (рис.), направленных вдоль оси  $Y_F$  и имеющих длину  $r$ . Нижние концы рычагов закреплены от всех линейных перемещений и поворотов вокруг оси  $Z_f$ .

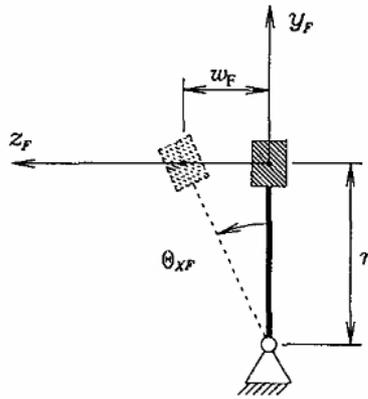


Рис. 1.4.2 Механизм связи угла поворота и линейного смещения

При закручивании основного стержня фиктивный стержень, благодаря установленным связям, получает поперечные перемещения  $w_F$  в направлении оси  $Z_F$ , вызывающие изгиб этого стержня относительно оси  $Y_F$ .

Энергия деформации  $E$  в построенной бистерженной модели является суммой энергий, накапливаемых порознь в основном и фиктивном стержнях. Если основной стержень наделить крутильной жесткостью  $GI$ , крутильную жесткость фиктивного стержня положить равной нулю, а жесткость фиктивного стержня при изгибе относительно Оси  $Y_F$  обозначить  $EI_{YF}$ . то энергия деформации  $E$  запишется в виде

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l [EI_{YF} (w_F'')^2 + GI_x (\theta_x')^2] dx$$

Таким образом, построенная бистерженная модель энергетически эквивалентна исходному тонкостенному стержню.

Внутренние силы в фиктивном стержне можно интерпретировать как обобщенные усилия в исходном тонкостенном стержне, возникающие при стесненном кручении.

Для фиктивного стержня изгибающий момент относительно оси  $Y_F$  может быть записан в виде

$$M_{yF} = -EI_{yF} w_F''$$

откуда с учетом всех зависимостей получаем

$$B = r M_{yF}$$

а изгибно-крутящий момент  $M_\omega$ , в свою очередь, получается дифференцированием бимоента  $B$ . Отсюда находим, что

$$Q_{zF} = M'_{yF}$$

Далее, поперечная сила  $Q_{zF}$  является производной от момента  $M_{yF}$ , то есть

$$M_{\omega} = r Q_{zF}$$

Итак, бимомент  $B$  и момент стесненного кручения  $M_{\omega}$  с точностью до множителя  $r$  совпадают соответственно с изгибающим моментом  $M_{yF}$ , и поперечной силой  $Q_{zF}$ , возникающими в фиктивном стержне. В практических расчетах удобно положить  $r = 1$  в принятой системе единиц измерения длин.

При построении дискретной схемы бистержневой модели мы не сможем обеспечить выполнение условий связи непрерывно вдоль всей оси  $X$  от нуля до  $l$ . Однако, разбив основной стержень по длине на некоторое количество (скажем,  $n$ ) участков, устанавливаем тем самым на нем  $n + 1$  узел, включая начальный и конечный узлы. Разбивая теперь фиктивный стержень на точно такие же участки. Теперь непрерывные условия связи можно приближенно заменить дискретными связями, заданными на конечном множестве точек в узлах основного и фиктивного стержней бистержневой модели. Соответственно и абсолютно жесткие рычаги в системе с дискретными связями сохраняются только в образованных узловых точках.

Следует отметить, что седьмая степень свободы, связанная с депланацией  $\Theta'$ , не исчезла бесследно, она лишь внешне изменилась, превратившись в  $\Theta_{yF}$ . Действительно, для бистержневой модели имеем

$$\theta'_x = \theta'_{yF} = w'_F / r = -\theta_{yF} / r$$

Однако, если  $\Theta'_x$ , нельзя напрямую связать с перемещениями узлов как жестких тел, то величина  $\Theta_{yF}$  естественным образом интерпретируется как повороты узлов фиктивного стержня относительно оси  $Y_f$ . Именно это обстоятельство и позволяет выполнять расчет тонкостенного стержня, оставаясь в рамках ограничений стандартного программного обеспечения, оперирующего конечными элементами с твердотельными узлами.

Но как говорилось вначале, что помимо ТКЭ и стержневых элементов есть и оболочечные элементы. И следует отметить, что в расчетной практике иногда оказывается недостаточным уровень детализации профилей в виде стержневых моделей и ТКЭ и особенно в тех случаях, когда необходимо учесть возможность искажения формы поперечного сечения или другие тонкие эффекты. Тогда применяется моделирование тонкостенного стержня набором оболочечных конечных элементов, с помощью которого можно учесть практически все особенности работы

такого сооружения. Детальная расчетная модель позволяет корректно учесть возможность потери местной и общей устойчивости.

Современная теория прочности и устойчивости тонкостенных стержней опирается на систему дифференциальных уравнений равновесия, предложенную В.З. Власовым. Но В.З. Власов допустил противоречия - уравнения системы нельзя назвать уравнениями равновесия, т.к. они получены не вариационным методом и не являются уравнениями экстремалей Эйлера-Лагранжа от функционала полной энергии упругой системы (по Тищенко). Исходя из этого, мы должны перейти к неклассической теории оболочек.

Под неклассическими понимают, прежде всего, теории оболочек типа Тимошенко, т.е. учитывающие деформации поперечного сдвига. С этими теориями можно знакомиться по обзору Э.И. Григолюка и И.Т. Селезова [56]. В теории оболочек принято выделять два существенно различных типа [57]: теории типа Лява и теории типа Тимошенко.

Теории типа Тимошенко, учитывают деформацию поперечного сдвига и описываются уравнениями гиперболического типа десятого порядка. В отличие от теории типа Лява теория типа Тимошенко не является универсальной в том смысле, что в ней, видимо, не существует однозначного пути для определения жесткости на поперечный сдвиг: различные задачи требуют различных значений коэффициента поперечного сдвига, так получается даже для однослойных оболочек постоянной толщины. Если проанализировать теории типа Лява и типа Тимошенко, то легко усматриваются две определяющие особенности этих теорий:

- 1) их описание в терминах двумерного многообразия;
- 2) использование исключительно концепций усилий и моментов.

Именно эти две особенности и положены в основу определения простой оболочки. Все остальные элементы теории, по существу, вытекают из этих положений.

Начиная с 70-х годов прошлого века исследователи при решении задач о деформировании оболочек МКЭ стали использовать уравнения теории пластин и оболочек (ТПО), основанные на кинематической гипотезе Тимошенко: волокно, направленное по нормали к отсчетной поверхности оболочки в не деформированном состоянии, в процессе деформирования остается прямым, но не обязательно нормальным к отсчетной поверхности, при этом его длина не изменяется. При дискретизации таких уравнений ТПО можно использовать те же базисные функции, что и при решении трехмерных задач. Такой подход к формулировке конечных элементов оболочки принято называть  $C^0$ -подходом.

Также в 70-х годах прошлого века возник более практичный подход к решению задач о деформировании оболочек МКЭ, основанный на прямом введении в трехмерные уравнения статической гипотезы Кирхгофа — Лява (нормальные напряжения пренебрежимо малы) и кинематической гипотезы Тимошенко, минуя этап формирования уравнений ТПО. Этот вариант  $C^0$ -подхода в последнее время стал широко распространенным, поскольку давал более простой путь дискретизации геометрически и физически нелинейных уравнений МДТТ по сравнению с первым вариантом  $C^0$ -подхода.

Следует отметить зарубежную работу [58] в которой говорится, что теория Тимошенко основана на нижеуказанном поле смещения:

$$\begin{Bmatrix} u_q \\ v_q \\ w_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z\theta_y \\ 0 \\ w \end{Bmatrix} \quad (1.4.1)$$

Где продольный сдвиг не пропорционален градиенту поперечного сдвига, но пропорционален углу поворота поперечного сечения. Предположение о верности теории Бернулли теряет тогда силу и допускается постоянное напряжение поперечного сдвига.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{q,x} \\ v_{q,x} + u_{q,y} \\ w_{q,x} + u_{q,z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z\theta_{y,x} \\ 0 \\ w_{,x} + \theta_y \end{Bmatrix} \quad (1.4.2)$$

Потенциальная энергия деформации включает в себя член, связанный с относительной деформацией сдвига:

$$U = \frac{1}{2} \int_A (E\varepsilon_{xx}^2 + 4G\varepsilon_{xz}^2) dA \quad (1.4.3)$$

Изгибающий момент и сдвигающая сила могут быть выражены в рамках обобщенных смещений:

$$\begin{aligned} M_y &= \int_A z\sigma_x dA = EI_y \theta_{y,x} \\ T_z &= \int_A \tau_{xz} dA = k_y GA(\theta_y + w_{,x}) \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Где  $k_y$  - коэффициент корректировки сдвига.

Важно отметить, что в 1.4.1 и 1.4.2 и с помощью базовых уравнениях,

сдвиговые напряжения являются одинаковыми в поперечном сечении (1.4.4,  $k_y = 1$ ). Однако если поперечное сечение подвергается воздействию сдвигающей силы  $T_z$ , угол сдвига  $2\varepsilon_{xz} = \tau_{xz} / G$  должен изменяться по мере высоты поперечного сечения и стремиться к нулю на свободных концах. Следовательно, поперечное сечение не остается плоским: оно деформируется. Деформирование достигает максимальной точки на нейтральной оси и пропадает по краям. Такое физическое поведение не сочетается с 1.4.1, которое допускает распределение постоянной деформации поперечного сдвига (1.4.2) и таким образом распределение постоянного напряжения сдвига. Следовательно, теория Тимошенко требует доработок. Чтобы компенсировать тот факт, что поле смещения нарушает границу распространения сдвига на краях открытого (ничем не ограниченного) сечения, приближительные модификации представлены коэффициентом корректировки сдвига  $k_y$  (уравнение 1.4.4).

#### Коэффициенты корректировки сдвига

Если вышеописанная деформация изменяется по продольной оси, соответственная она увеличивает поперечное смещение сдвига. Это влияние является значимым для изгиба короткой балки, выражается коэффициентом корректировки сдвига  $k_y$ . В случае размещения в плоскости  $xz$ , этот коэффициент высчитывается с помощью энергетического подхода [59,60,61]:

$$k_y = \frac{A}{I_y^2} \int_A \left( \frac{S_y}{t} \right)^2 dA \quad (1.4.5)$$

Коэффициент корректировки сдвига можно проследить в пропорции площади поперечного сечения балки к зоне действия сопротивления сдвиговой деформации. Уравнение 1.4.5 дает приближительное значение. Другие вычисления коэффициента корректировки сдвига могут быть достигнуты с помощью теории упругости. Величина, обратная коэффициенту корректировки сдвига, и называемая константой сдвигового смещения, зачастую требуется при общепринятом методе конечно-элементного анализа. Важно отметить, что вычисление коэффициента корректировки сдвига делает необходимым определение статического момента распределения по контуру профиля с помощью подходящих методов обычно различных для открытого и замкнутого поперечных сечений.

## **1.5. Современное состояние методик расчета перфорированных тонкостенных профилей**

Следует отметить, что в нашей стране в 1990-х гг. исследования легких стальных конструкций ушли в тень. В связи с этим имеет смысл дать краткий обзор зарубежных исследований тонкостенных и в частности перфорированных профилей. В прошлые десятилетия было издано довольно много зарубежных отчетов о научно-исследовательской работе тонкостенных профилей. Хотя в последнее время применение перфорированных профилей увеличивается, некоторые стандарты до сих пор ограничивают их применение из-за недостаточных данных о их работе. По перфорированным профилям, проблемам потери устойчивости и их форм следует отметить несколько работ.

В работе [62] исследуется потеря устойчивости с учетом закручивания вокруг своей оси холодноформованных стальных элементов при изгибе. Часто профили выходят из строя из-за местной или/и крутильной формы потери устойчивости. Для некоторых элементов крутильная форма потери устойчивости может являться лимитирующим условием для несущей способности. На данный момент крутильная форма потери устойчивости является неисследованной темой в изучении и нет адекватных экспериментальных данных для их исследования.

В работе [63] выполнен анализ перфорированных тонкостенных профилей методом изопараметрических конечных элементов в виде сплайнов. Цель данной работы состояла в том, чтобы развить математический аппарат, который используется в методе конечных элементов, который позволит комплексно оценить напряженно-деформированное состояние. В дальнейшем данный метод позволит проектировать и исследовать НДС профилей в общем и частных случаях. В данной работе изопараметрический метод конечных элементов усовершенствован за счет того, что применяется новая методика разбиения профилей на конечные элементы с учетом сгущения сетки конечных элементов в перфорированных областях профилей. Предложенный математический аппарат был сформирован в виде расчетной программы, которая применялась для исследования НДС профилей. В итоге был представлен новый и эффективный числовой инструмент для структурного анализа.

В работе [64] проведен анализ перфорированных тонкостенных профилей методом прямой силы. Исследовательская работа представляет собой развитие общей теории проектирования тонкостенных профилей, которая связывает упругие деформации с приложенной нагрузкой. Закономерности для этой теории разрабатываются с помощью метода прямой силы, с помощью которого, рассматривая местную, крутильную и общую потерю устойчивости и возникающие при этом деформациями, можно предсказать критическую силу нагружения. Данный

метод сравнивается с методом МКЭ.

В работе [65] показана местная деформация и остаточные напряжения упругопластическое выпучивание стенки профилей на примере анализа квадратных тонкостенных колонн.

В работе [65] главная цель исследования состоит в том, чтобы получить улучшенное понимание поведения профилей с ребрами жесткости и без них при местной поперечной нагрузке. При исследовании использованы экспериментальные и численные методы.

Исследована в работе [66] устойчивость при сжатии стальных колонн с низким деформационным (механическим) самоупрочнением на примере анализа квадратных тонкостенных колонн, которые выполнены из совмещенных тонкостенных профилей.

В работе [9] произведен расчет прямоугольных профилей с учетом пластических деформаций. Дана экспериментальная оценка соединений колонн с ригелем порталных рам из прямоугольных профилей при условии возникновения пластического шарнира. Проведена разработка перспективных соединений колонн с ригелем и дана оценка работы в целом порталных рам под действием ветровой нагрузки.

Дано обоснование в работе [67] для механических характеристик соединений для конструкций стеллажного типа. Проведено исследование болтовых соединений и влияния отверстий на несущую способность профилей.

Исследование Z-образной однопролетной балки несущей постоянно опертый на профилированный лист кровли с учетом крутильной формы потери выявило ряд особенностей в работе [68], чтобы было отражено в [7].

Из самых последних исследований хочется отметить работы [69,70,71,72], в которых проведено значительное количество экспериментальных тестов над перфорированными профилями.

Резюмируя, основными направлениями исследования в данной области за последние годы явились следующие:

1. Развитие математического аппарата, который позволяет комплексно оценить напряженно-деформированное состояние (НДС). Разработанные методы позволяют проектировать и исследовать НДС профилей в общем и частном случаях. В исследованиях базовый метод конечных элементов усовершенствован за счет того, что применяется новая методика разбиения профилей на конечные элементы с учетом сгущения сетки конечных элементов. Предложенные математические

аппараты послужили базой для создания расчетных программ, которые применяются для исследования НДС профилей. В итоге был представлен новый и эффективный численный инструмент для структурного анализа.

2. Развитие общей теории проектирования, которая связывает упругие деформации с приложенной нагрузкой. Закономерности для этой теории разрабатываются с помощью вновь созданных математических аппаратов, с помощью которых, рассматривая местную, крутильную и общую потерю устойчивости и возникающие при этом деформациями, можно предсказать критическую силу нагружения.

3. Исследование крутильной формы потери устойчивости. Часто профили выключаются из работы из-за местной или/и крутильной формы потери устойчивости. Для некоторых элементов крутильная форма потеря устойчивости может являться лимитирующим условием для несущей способности. В исследованиях наиболее часто рассматривается поведение С и Z профилей.

Исследованием указанных выше направлений занимались и продолжают заниматься в данный момент: Ченг Ю и Бенджамин В. Шкафер (США, AISI), Ким Д.Р. Расмуссен (Австралия), Р. Зандонини (Италия), Р. Ландольфо (Италия), Г.Д. Хэнкок (Австралия), М.А. Брэдфорд (Австралия), Д.П. Бернارد (Австралия). Г.Д. Хэнкок (1997 и 2003 гг.) обобщил проведенные исследования для крутильно-изгибной формы потери устойчивости, результаты которых были учтены в разделе свойств материала в нормативных документах [7] «Еврокод 3. Часть 1.3» (1996) и «AISI Specification 1997».

На данный момент работа [73] является самым последним и наиболее полным обобщением зарубежных исследований по всем вопросам, связанным с изучением тонкостенных профилей, в том числе и перфорированных.

В последнее время в нашей стране также наметилась тенденция к возрождению исследований в области тонкостенных и перфорированных конструкций. И следует обратить внимание на работы исследователей и их результаты, выполненные в последнее десятилетие.

В работе [74] исследованы особенности НДС балок коробчатого сечения с перфорированными стенками при воздействии крутящего момента, поперечной силы и совместного действия крутящего момента и поперечной силы. Результаты подтверждают существенное влияние сдвига на величину прогибов в большом диапазоне параметров. Для определения прогибов в балках с перфорированной стенкой предлагается новая геометрическая модель, в которой участок сечения балки с отверстием заменяется сплошным с приведенной толщиной. Для

определения максимальных касательных напряжений в уровне сварного шва балок коробчатого сечения с перфорированными стенками при свободном кручении разработана геометрическая модель, в которой участок сечения каждой из стенок балки с отверстием заменяется сплошным с приведенной толщиной. Впервые выявлено появление нормальных напряжений в балке замкнутого сечения с перфорированными стенками при свободном кручении. К нерешенным задачам можно отнести отсутствие выявления резервов и способов увеличения несущей способности. А также то, что элементы имеют существенную толщину и их нельзя отнести к тонкостенным.

В работе [75] исследована прочность двутавровых стержней с перфорированной стенкой при общем случае загрузки. Произведен расчет на устойчивость двутавровых стержней с перфорированной стенкой при внецентренном сжатии, а также на прочность и пространственную устойчивость этих элементов. Введены новые данные, характеризующие влияние перфорации стенки на несущую способность. Показано, что на несущую способность перфорированного элемента оказывает влияние не только величина, но и направление поперечной силы, которая вызывает дополнительный изгиб поясов. При расчете перфорированного элемента следует учитывать такой знак поясного момента, при котором предельная величина общего изгибающего момента будет наименьшей. Исследованы пространственные деформации и устойчивость элементов в зависимости от ряда параметров. К нерешенным задачам можно отнести то, что прокатные профили имеют существенную толщину и их нельзя отнести к тонкостенным. Не рассмотрены вопросы распределения касательных и нормальных напряжений в местах перфорации.

В работе [75] исследована работа сжато-изогнутых перфорированных стержней в упруго-пластической стадии и оптимизация геометрических параметров реза стенки. Определены две возможные формы разрушения: первая - связана с образованием пластических напряжений по одному поперечному сечению хотя бы в одном из поясов перфорированного стержня; вторая - с образованием пластических шарниров в двух поперечных сечениях, проходящих по смежным углам одного отверстия. Установлено, что касательные напряжения в сечениях перфорированного стержня создают специфические условия для разрушения: разрушение наступает практически одновременно с появлением пластических напряжений по всей высоте стенки в ослабленных сечениях, в то время как полка может частично сохранять упругое ядро. Анализ эффективности изготовления перфорированных стержней из прокатного двутавра показал, что увеличение несущей способности существенно зависит от соотношения действующих усилий. К нерешенным задачам можно отнести то, что не было проработано вопросов учета устойчивости перфорированной

стенки с учётом упруго-пластической работы металла и не рассмотрены вопросы конструирования.

В работе [76] предложен усовершенствованный алгоритм расчета эффективных упругих характеристик перфорированных пластин и оболочек на основе применения теории функций комплексного переменного к задаче теории упругости. Для верификации результатов проведено также конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния в перфорированных пластинах. Полученные численные значения полностью совпадают с аналитическими решениями. Разработана технология определения напряженно-деформированного состояния и приведенных упругих характеристик для толстых перфорированных пластин. Проведено исследование поведения приведенных упругих характеристик в зависимости от толщины пластины.

Установлено, что для тонких перфорированных пластинок пренебрежение зависимостью приведенного модуля упругости на изгиб от толщины может обернуться большими погрешностями в расчетах. К нерешенным задачам можно отнести то, что не рассматривались вопросы совместной работы пластин, т.е. профиля в целом. А также, что исследование в большей мере было посвящено толстым пластинам.

В работе [77] проведено исследование балок с шахматной перфорацией стенки. Разработаны новые конструкции балок на основе развитых сквозных двутавров с нерегулярной шахматной перфорацией стенки. Выявлено напряженно-деформированное состояние развитых балок с нерегулярной шахматной перфорацией стенки. Критерием выбора является расчет на местную устойчивость. Установлено, что при соблюдении рекомендаций, сформулированных в работе, устойчивость стенки обеспечивается вплоть до разрушения балок. При больших значениях касательных напряжений в стенке рекомендуется проверять устойчивость стенки и конструктивно устанавливать опорные ребра. Сомнению подвергается устойчивость перфорированной стенки вплоть до разрушения профиля. А также то, что не разработаны рекомендации по установке элементов жесткости и их реализация для тонкостенных элементов.

В работе [78] разработана схема метода конструктивной анизотропии для оболочек ступенчато-переменной толщины (перфорированных), учитывающая сдвиговую и крутильную жесткость ребер и их жесткое соединение в местах пересечения. Для этой схемы получены уравнения в перемещениях и в смешанной форме. Разработан комплексный критерий применимости указанной схемы. Проведен вычислительный эксперимент, подтверждающий эффективность этой схемы по сравнению с ранее известными. На основе принятой модели проведено

исследование устойчивости пологих оболочек, ослабленных вырезами. Практическая значимость заключается в разработке математического обеспечения комплексных расчетов (устойчивость, подбор рациональных параметров) пологих оболочек ступенчато-переменной толщины. К нерешенным задачам можно отнести то, что не рассматривались вопросы совместной работы пластин, т.е. профиля в целом.

В работе [79] выполнен расчет на пространственную устойчивость тонкостенных стержневых элементов из гнутых профилей открытого сечения с учетом следующих факторов: различных условий загрузки продольной силой на концах элемента; фактического распределения механических характеристик стали и остаточных напряжений; начальных искривлений и углов закручивания; формы сечения; возможной потери местной устойчивости; заключения и выводы о влиянии упрочнения и остаточных напряжений, формы сечения, размеров и расположения зон редуцирования на пространственную устойчивость. Результаты экспериментальных исследований пространственной устойчивости стержней из гнутого швеллера, сжатых силой с разными концевыми двухосными эксцентриситетами; результаты численных исследований, представленные в безразмерных параметрах в виде таблиц коэффициентов, которые могут быть использованы для проверки пространственной устойчивости элементов конструкций из гнутых профилей.

Проведенный анализ зарубежных и отечественных исследований показал, что вопросы практического расчета тонкостенных холодноформованных профилей с перфорацией освещены довольно неполно. Несмотря на то, что в зарубежных публикациях этому вопросу уделено внимание, тем не менее, Еврокод [7] не дает по перфорированным элементам рекомендаций по расчету и к тому же занижил пластичность профилей при расчете на устойчивость.

В работе фактические разрушающие моменты в конструкциях с гибкими профилями будут ниже, чем теоретические расчетные моменты, определенные при условии применения обычной расчетной модели профилей.

## **1.6. Расчет тонкостенных профилей по методике Еврокода**

Следует отметить исследователей, посвятивших себя рассмотрению вопроса предсказания формы потери устойчивости, сравнения аналитических расчетов с экспериментальными данными. Среди зарубежных ученых выделяется Моен. Он имеет ряд интересных работ [80,81,82,83,84], в которых уточняются известные методы и разработаны новые по аналитическому расчету тонкостенных профилей.

Согласно Еврокоду 3, часть 1-3, тонкостенные профиля имеют четыре вида потери устойчивости (рис. 1.6.1):

1. Местная потеря устойчивости;
2. Потеря устойчивости формы поперечного сечения;
3. Изгибно-крутильная форма потери устойчивости;
4. Общая изгибная форма потери устойчивости.

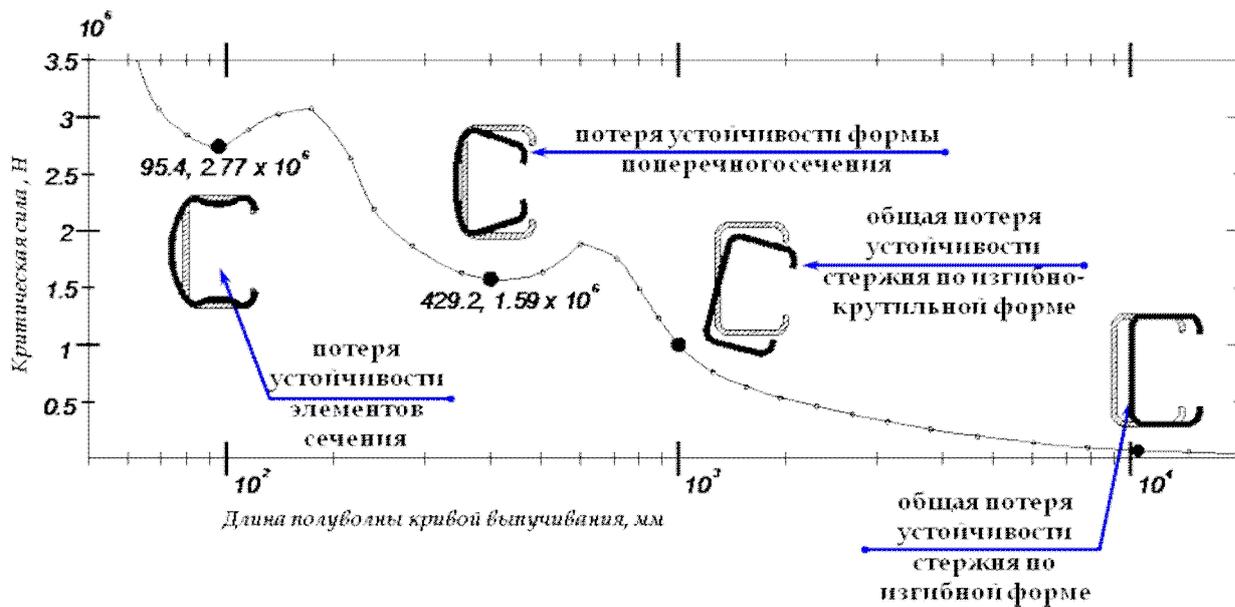


Рис. 1.6.1. Формы потери устойчивости в зависимости от нагрузки и длины полуволны кривой выпучивания

Из рис. 1.6.2 видно, что при нагружении профиля сначала происходит местная и потеря устойчивости формы поперечного сечения. Данное утверждение, имеющееся в нормативном документе, подтверждается многими исследованиями и испытаниями стоек зарубежными учеными.

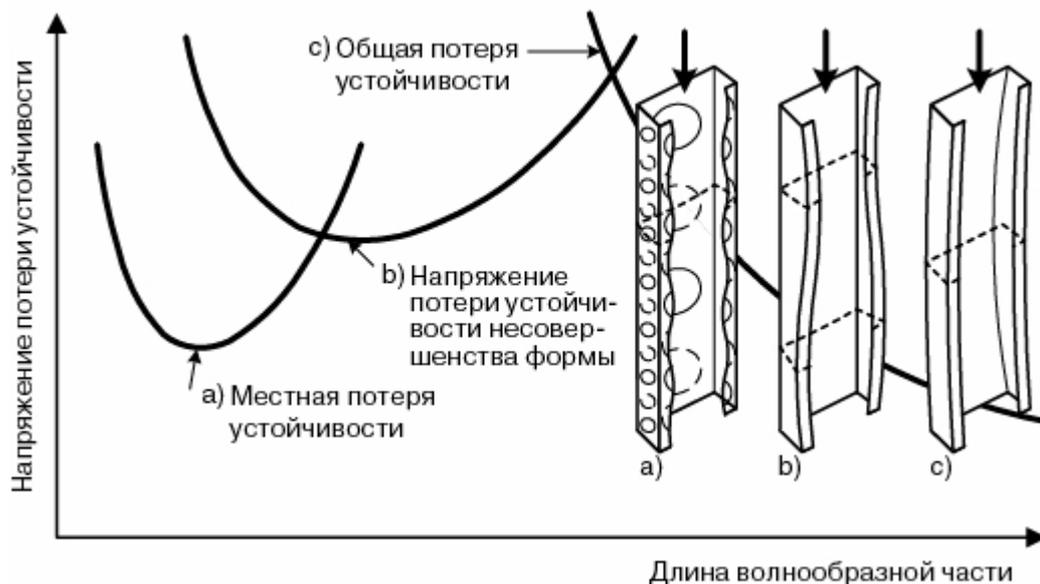


Рис. 1.6.2. Зависимость форм потери устойчивости от напряжения

Поэтому в расчете на прочность и устойчивость тонкостенных профилей используются их эффективные характеристики, к которым относятся:

- Эффективная площадь поперечного сечения  $A_{eff}$  – при расчете на сжатие;
- Эффективный момент сопротивления поперечного сечения  $W_{eff}$  – при расчете на изгиб, внецентренное сжатие;

Остановимся на двух первых формах потери устойчивости.

### 1.6.1. Местная потеря устойчивости

Если в элементах поперечного сечения профиля имеются сжимающие напряжения, то имеет место местная потеря устойчивости пластины. При этом часть площади поперечного сечения выключается из работы (рис. 1.6.3, 1.6.4).

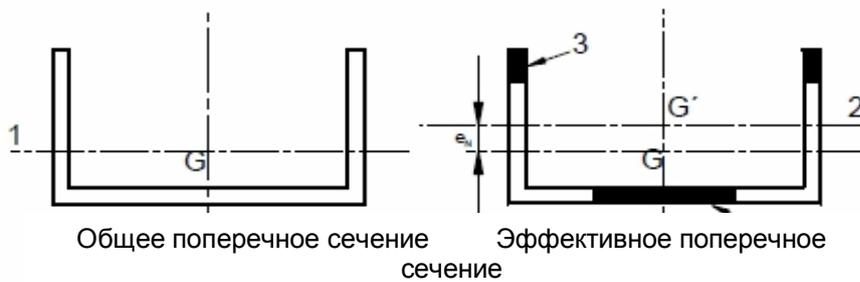


Рис. 1.6.3. Эффективная площадь при осевом сжатии

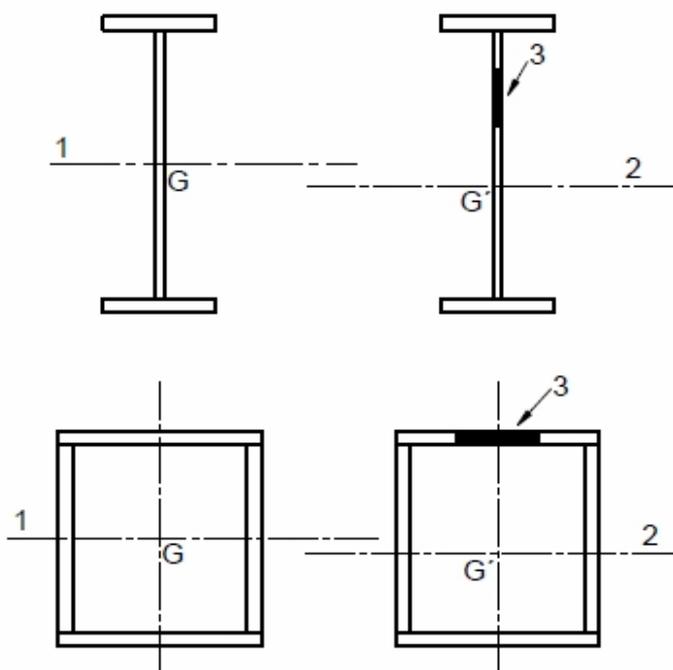
G – центр тяж. общего поперечного сечения

G' – центр тяж. эффективного поперечного сечения

1 – центральная ось общего поперечного сечения

2 – центральная ось эффективного сечения

3 – неэффективная площадь



Общее поперечное сечение      Эффективное поперечное сечение

Рис. 1.6.4 Эффективная площадь при изгибающем моменте

G – центр тяж. общего поперечного сечения

G' – центр тяж. эффективного поперечного сечения

1 – центральная ось общего поперечного сечения

2 – центральная ось эффективного сечения

3 – неэффективная площадь

Эффективная площадь сжатых элементов должна быть получена по рис. 1.6.5 для внутренних элементов и по рис. 1.6.6 для наружных элементов. Эффективная площадь сжатой зоны пластины с общей площадью поперечного сечения  $A_c$  вычисляется следующим образом:

$$A_{c,eff} = \rho A_c \tag{1.6.1}$$

где  $\rho$  – коэффициент уменьшения при изгибе пластины.

Коэффициент уменьшения  $\rho$  может быть получен следующим образом:

- внутренние сжатые элементы

$$\rho = 1,0 \quad \text{для} \quad \bar{\lambda}_p \leq 0,673$$

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0,055(3 + \psi)}{\bar{\lambda}_p^2} \leq 1,0 \quad \text{для} \quad \bar{\lambda}_p > 0,673, \text{ where } (3 + \psi) \geq 0$$

(1.6.2)

- наружные сжатые элементы

$$\rho = 1,0 \quad \text{для} \quad \leq 0,748$$
$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0,188}{\bar{\lambda}_p} \leq 1,0 \quad \text{для} \quad > 0,748 \quad (1.6.3)$$

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} = \frac{\bar{b}/t}{28,4 \varepsilon \sqrt{k_\sigma}}$$

$\Psi$  - коэффициент напряжений, определенный в соответствии с рис. 1.6.5, 1.6.6.

$\bar{b}$  - подходящая ширина, выбираемая по следующему принципу:

$b_w$  - для стенок;

$b$  - для внутренних элементов полок (кроме «RHS»);

$b - 3t$  - для полок «RHS»;

$c$  - для наружных полок;

$h$  - для равнополочных уголков;

$h$  - для неравнополочных уголков;

$k_\sigma$  - фактор изгиба в соответствии с коэффициентом напряжений  $\psi$  и граничными условиями. Для длинных пластин  $k_\sigma$  дан как соответствующее значение на рис. 1.6.5, 1.6.6.

$t$  – толщина;

$\sigma_{cr}$  - предельное напряжение при изгибе, см. рис. 1.6.5, 1.6.6.

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y [\text{N/mm}^2]}}$$

Распределение напряжений (сжатие положительное)				Эффективная ширина $b_{eff}$		
				$\underline{\psi = 1}$ : $b_{eff} = \rho \bar{b}$ $b_{e1} = 0,5 b_{eff}$ $b_{e2} = 0,5 b_{eff}$		
				$\underline{1 > \psi \geq 0}$ : $b_{eff} = \rho \bar{b}$ $b_{e1} = \frac{2}{5 - \psi} b_{eff}$ $b_{e2} = b_{eff} - b_{e1}$		
				$\underline{\psi < 0}$ : $b_{eff} = \rho b_c = \rho \bar{b} / (1 - \psi)$ $b_{e1} = 0,4 b_{eff}$ $b_{e2} = 0,6 b_{eff}$		
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	1	$1 > \psi > 0$	0	$0 > \psi > -1$	-1	$-1 > \psi > -3$
Коеф. изгиба $k_\sigma$	4,0	$8,2 / (1,05 + \psi)$	7,81	$7,81 - 6,29\psi + 9,78\psi^2$	23,9	$5,98 (1 - \psi)^2$

Рис. 1.6.5 Внутренние элементы

Распределение напряжений (сжатие положительное)				Эффективная ширина $b_{eff}$		
				$\underline{1 > \psi \geq 0}$ : $b_{eff} = \rho c$		
				$\underline{\psi < 0}$ : $b_{eff} = \rho b_c = \rho c / (1 - \psi)$		
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	1	0	-1	$1 \geq \psi \geq -3$		
Коеф. изгиба $k_\sigma$	0,43	0,57	0,85	$0,57 - 0,21\psi + 0,07\psi^2$		
				$\underline{1 > \psi \geq 0}$ : $b_{eff} = \rho c$		
				$\underline{\psi < 0}$ : $b_{eff} = \rho b_c = \rho c / (1 - \psi)$		
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	1	$1 > \psi > 0$	0	$0 > \psi > -1$	-1	
Коеф. изгиба $k_\sigma$	0,43	$0,578 / (\psi + 0,34)$	1,70	$1,7 - 5\psi + 17,1\psi^2$	23,8	

Рис. 1.6.6 Внешние элементы

### 1.6.2. Потеря устойчивости формы поперечного сечения

Виды потери устойчивости формы поперечного сечения представлены на рис.

1.6.7.

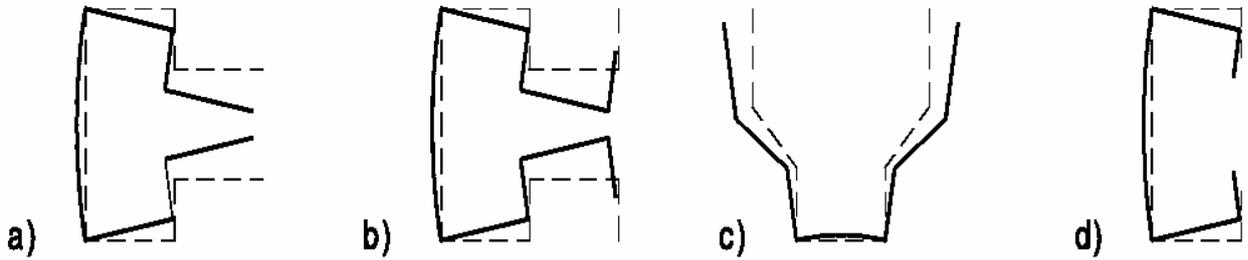


Рисунок 1.6.7 Примеры потери устойчивости формы поперечного сечения

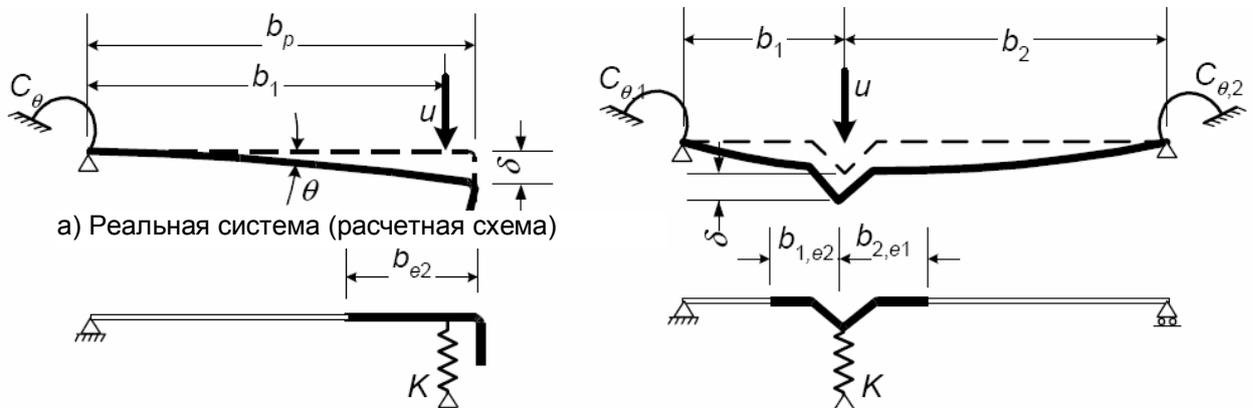
Расчет сжатых элементов с краевыми или промежуточными элементами жесткости должен быть основан на допущении, что элемент жесткости работает как сжатый с непрерывным частичным защемлением, как пружина, жесткость которой зависит от граничных условий и изгибной жесткости соседних плоских элементов.

Жесткость пружины элемента жесткости должна определяться приложением единичной нагрузки « $u$ » на единицу длины. Жесткость пружины « $K$ » на единицу длины может быть определена как

$$K = u/\delta \quad \dots(1.6.4)$$

где:

$\delta$  – перемещение элемента жесткости от единичной нагрузки « $u$ », действующей в центре тяжести ( $b_1$ ) эффективной части поперечного сечения.



б) Эквивалентная система (идеализированная расчетная схема)

Рисунок 1.6.8 Реальная и эквивалентная схемы

Таким образом, элементы поперечного сечения профиля, подверженные потере устойчивости формы поперечного сечения, рассматриваются как пластины на упругом основании с жесткостью  $K$  (рис. 1.6.9).

Тип элемента	Модель	Тип элемента	Модель

Рис. 1.6.9: Модели (расчетные схемы) элементов поперечного сечения

Для случаев, где краевые элементы жесткости являются отгибами полок С- и Z-образных профилей,  $C\theta$  должна определяться от единичной нагрузки « $u$ », приложенной как показано на рис. 1.6.8. В результате выражение жесткости пружины  $K_1$  для полки 1 следующее:

$$K_1 = \frac{Et^3}{4(1-\nu^2)} \cdot \frac{1}{b_1^2 h_w + b_1^3 + 0,5 b_1 b_2 h_w k_f} \quad \dots(1.6.5)$$

где:

$b_1$  – расстояние от пересечения стенки и полки до центра эффективной площади краевого отгиба (включая эффективную часть  $b_{c2}$  полки) на полке 1, см. рис. 1.6.8 (а);

$b_2$  – расстояние от пересечения стенки и полки до центра эффективной (приведенной) площади краевого отгиба (включая эффективную часть полки) 2;

$h_w$  – высота стенки;

$k_f = 0$  – если полка 2 растянута (т.е. для балки, изгибаемой относительно оси у-у);

$$k_f = \frac{A_{\text{eff}2}}{A_{\text{eff}1}} \quad \text{– если полка 2 сжата (как для стержня при осевом сжатии);}$$

$k_f = 1$  – для симметричного сжатия сечения;

$A_{\text{eff}1}$  и  $A_{\text{eff}2}$  – эффективная площадь краевого отгиба, включая эффективную часть  $b_{s2}$  полки, см. 1.6.8 (b) для полок 1 и 2 соответственно.

Уменьшающий коэффициент  $\chi_d$  для учета изменений формы при потере устойчивости от изгиба элемента жесткости должен определяться с учетом относительной гибкости  $\bar{\lambda}_d$  следующим образом

$$\chi_d = 1,0 \quad \text{if } \bar{\lambda}_d \leq 0,65 \quad \dots(1.6.6a)$$

$$\chi_d = 1,47 - 0,723\bar{\lambda}_d \quad \text{if } 0,65 < \bar{\lambda}_d < 1,38 \quad \dots(1.6.6b)$$

$$\chi_d = \frac{0,66}{\bar{\lambda}_d} \quad \text{if } \bar{\lambda}_d \geq 1,38 \quad \dots(1.6.6c)$$

где

$$\bar{\lambda}_d = \sqrt{f_{yb} / \sigma_{cr,s}} \quad \dots(1.6.6d)$$

где  $\sigma_{cr,s}$  – критическое напряжение для упругих элементов жесткости.

Критическое напряжение  $\sigma_{cr,s}$  краевого отгиба в упругой стадии должно определяться по формуле:

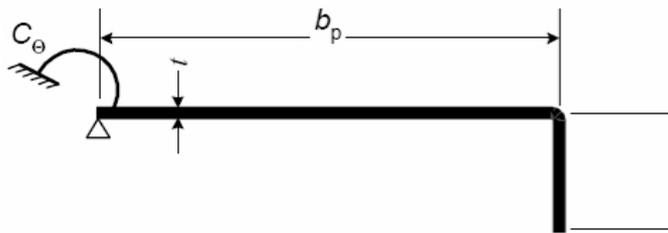
$$\sigma_{cr,s} = \frac{2 \sqrt{K E I_s}}{A_s} \quad \dots(1.6.7)$$

где:

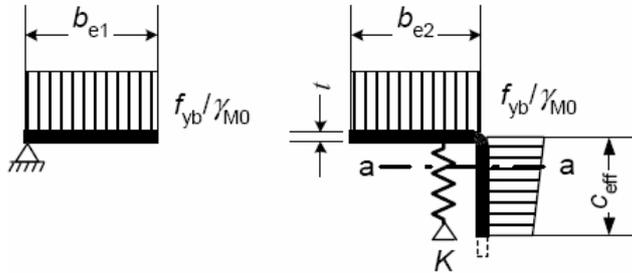
$k$  – жесткость пружины на единицу длины, см. 1.6.5;

$I_s$  – эффективный момент инерции сечения отгиба с эффективной площадью  $A_s$  относительно центральной оси.

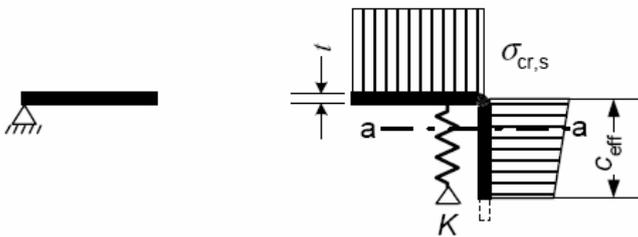
Снижающий коэффициент  $\chi_d$  для оценки устойчивости краевого отгиба при изгибе должен определяться в зависимости от величины  $\sigma_{cr,s}$ .



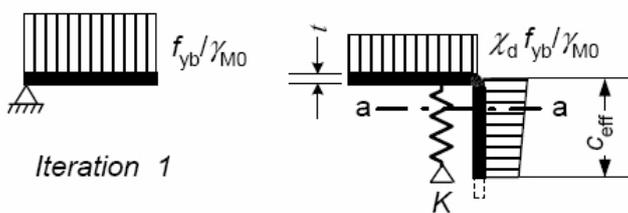
а) Полное поперечное сечение и граничные условия



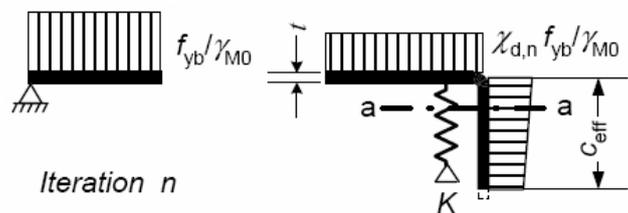
б) Этап 1: Эффективное поперечное сечение для  $K = \infty$ , основанное на  $\sigma_{com}$ ,  $E_d = f_{yb}/\gamma_{M0}$



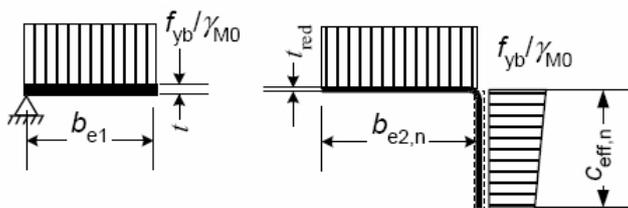
в) Этап 2: Критическое напряжение  $\sigma_{cr,s}$  для эффективной площади  $A_s$  упругого элемента жесткости из этапа 1.



г) Сниженная прочность  $\chi_d f_{yb}/\gamma_{M0}$  для ребра с эффективной площадью  $A_s$  и снижающим коэффициентом  $\chi_d$ , основанным на  $\sigma_{cr,s}$



е) Этап 3: Произвольно повторяется этап 1 для расчета эффективной ширины с уменьшенным сжимающим напряжением  $\sigma_{com,Ed,i} = \chi_d f_{yb}/\gamma_{M0}$  с  $\chi_d$  после предыдущей итерации, продолжающейся до тех пор, пока не выполняются следующие условия  $\chi_{d,n} \approx \chi$ , но  $\chi_{d,n} \leq \chi_{d,(n-1)}$



ф) Выбирается эффективное поперечное сечение с  $b_{e2}$ ,  $C_{eff}$  и уменьшенная толщина  $t_{red}$  соответствующая  $\chi_{d,n}$

Рисунок 1.6.10 Сопротивление сжатию полки с элементом жесткости в виде

краевого отгиба

При условии  $\chi_d < 1$  значение снижающего коэффициента можно определить итерационно, начиная итерацию с модифицированных значений  $\rho$ , полученных по п. 5.5.2(5) с  $\sigma_{\text{com,Ed},i} = \chi_d f_{yb} / \gamma_{M0}$  таким образом, что:

$$\bar{\lambda}_{p,\text{red}} = \bar{\lambda}_p \sqrt{\chi_d} \quad \dots(1.6.8)$$

Уменьшенная эффективная площадь элемента жесткости  $A_{s,\text{red}}$  с учетом потери устойчивости от изгиба должна определяться как

$$A_{s,\text{red}} = \chi_d A_s \frac{f_{yb} / \gamma_{M0}}{\sigma_{\text{com,Ed}}} \quad \text{но} \quad A_{s,\text{red}} \leq A_s \quad \dots(1.6.9)$$

где:

$\sigma_{\text{com,Ed}}$  – сжимающее напряжение вдоль центральной оси элемента жесткости, рассчитанное как для эффективного поперечного сечения.

При определении геометрических характеристик эффективного сечения профиля, уменьшенная эффективная площадь  $A_{s,\text{red}}$  должна быть определена с учетом уменьшенной толщины  $t_{\text{red}} = t A_{s,\text{red}} / A_s$  для всех элементов, включенных в  $A_s$ .

## 1.7. Постановка задачи исследования

Диссертация посвящена исследованию работы тонкостенных перфорированных профилей, с применением методов численного и аналитического анализа, а также оценки с помощью обобщения и обработки статистических данных и библиографического анализа с использованием электронных баз данных.

Целью работы является дальнейшее развитие теоретической и практической составляющей численных методов для решения задач линейного деформирования тонкостенных профилей, уточнение их работы и усовершенствование аналитического метода расчета перфорированных стоек.

Приведенный анализ литературы показал, что большое внимание уделено теории расчета тонкостенных профилей, в том числе методом конечных элементов. Разработаны методики расчета, виды конечных элементов, отвечающих реальной их работе. Возможно применение тонкостенных конечных стержневых элементов, учитывающих не только чистое, но и стесненное кручение при совпадении и несовпадении центров тяжести и изгиба, наличии или отсутствии эксцентриситетов в узлах элементы. Кроме учитываемых, при расчете обычных стержневых систем,

степеней свободы в каждом узле: трех линейных и трех угловых, для конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля учитывается седьмая степень свободы узла - депланации сечения. Таким образом, ТКЭ с узлами в начале и конце имеет 14 степеней свободы.

Также возможно применение обычных стержневых конечных элементов. С учетом того, что теория тонкостенных стержней открытого профиля требует введения седьмой степени свободы, следует обратиться к работе А.В.Перельмутера и А.И.Сливкера. Специальный прием позволяет обойти эти затруднения и вводить в каждый из узлов расчетной схемы не более 6 степеней свободы. Этот прием основан на построении специальной модели - «бистержневой моделью тонкостенного стержня».

Но помимо тонкостенных конечных стержневых и стержневых элементов есть и оболочечные элементы. В расчетной практике применяется моделирование тонкостенного стержня набором оболочечных конечных элементов, с помощью которого можно учесть практически все особенности работы такого сооружения. Детальная расчетная модель позволяет корректно учесть возможность потери местной и общей устойчивости.

В зарубежных работах отмечается большое внимание к вопросу потери устойчивости стержней, сравнение экспериментальных данных с численным и теоретическим методами.

#### Еще че нить

Обзор литературы показал, что хорошо проработаны вопросы потери устойчивости профилей и методики их расчета. Однако мало внимания уделено рассмотрению влияния касательных напряжений и деформации сдвига в стойках замкнутого сечения. Также остается открытым вопрос влияния перфорации на несущую способность стержней.

Из изложенного вытекают следующие задачи настоящей работы:

1. Разработать оболочечную модель стойки составного замкнутого сечения;
2. Рассмотреть влияние сдвиговых усилий и касательных напряжений на устойчивость замкнутого стержня;
3. Сравнить распределение напряжений в перфорированном и цельном профиле при сжатии и изгибе;
4. Получить коэффициент перехода от цельного профиля к перфорированному;
5. Разработать методику по расчету перфорированных профилей на прочность.



## 2. Исследования эффективной ширины стенки по методике Еврокода

На основе требований Еврокода (см. п. 1.6) был составлен документ в программе Mathcad, который позволяет найти предельную нагрузку при сжатии и предельный изгибающий момент при изгибе. Автоматизация расчета позволяет, изменяя исходные данные (размеры поперечного сечения профиля, толщина, марка металла), получать данные об эффективных характеристиках профиля и предельной нагрузки.

Расчет эффективной ширины стенки тонкостенного профиля при сжатии по Еврокоду 3 показал, что большая ее часть, примерно  $2/3$ , выключается из работы, и лишь  $1/3$  участвует в расчете на прочность. Размер эффективной ширины зависит от толщины и длины пластины. Эффективная площадь поперечного сечения профилей при сжатии представлена в таблице 2.1.

Наименование профиля	A - площадь поперечного сечения, мм <sup>2</sup>	A <sub>eff</sub> - эффективная площадь поперечного сечения, мм <sup>2</sup>	A <sub>eff</sub> /A
ПС-150-0,8	216,5	116,2	0,54
ПС-150-1,0	274,6	169,2	0,62
ПС-150-1,2	333,1	226,0	0,68
ПС-150-1,5	421,8	310,5	0,74
ПС-150-2,0	572,0	463,1	0,81
ПС-200-0,8	254,5	118,7	0,47
ПС-200-1,0	322,6	171,0	0,53
ПС-200-1,2	391,1	227,8	0,58
ПС-200-1,5	494,8	314,0	0,63
ПС-200-2,0	670,0	471,8	0,70

Таблица 2.1 Результаты расчета профилей при сжатии

По представленным в таблице данным видно, что несмотря на то, что профили высотой 200 мм имеют большую площадь по сравнению с профилями высотой 150 мм, они имеют равную эффективную площадь. Также можно сделать вывод, что чем толще металл, тем эффективнее его использование. Поэтому для того, чтобы увеличить эффективность профилей с большими высотами стенки, рекомендуется устанавливать в ее середине жесткую вставку, либо использовать несколько жестких вставок. Рассмотрим полученные результаты по профилям при изгибе (табл. 2.2).

Наименование профиля	W – момент сопротивления, см <sup>3</sup>	W <sub>eff</sub> - эффективный момент сопротивления, см <sup>3</sup>	W <sub>eff</sub> /W
ПС-150-0,8	10,0	7,3	0,73
ПС-150-1,0	13,0	10,3	0,79
ПС-150-1,2	15,7	13,7	0,87
ПС-150-1,5	20,0	17,8	0,89
ПС-150-2,0	27,1	24,1	0,89
ПС-200-0,8	15,0	10,2	0,68
ПС-200-1,0	19,0	14,4	0,76
ПС-200-1,2	23,1	18,8	0,81
ПС-200-1,5	29,3	25,4	0,87
ПС-200-2,0	39,8	35,9	0,90

Таблица 2.2 Результаты расчета профилей при изгибе

В отличие от сжатия, применение профиля с высотой стенки 200мм оправдывает себя. Но тенденция о росте эффективности использования профиля при увеличении его толщины сохраняется.

Как уже было сказано выше, центральная часть стенки профиля при сжатии выключается из работы. Как раз в этой же области выполняется перфорация для термопрофилей. Поэтому фактически снижение продольной жесткости стержня из-за устройства отверстий уже учитывается стандартным расчетом по Еврокод. Другое дело обстоит с профилями, работающими на изгиб.

## 2.1. Пример расчета С профиля на сжатие и изгиб с учетом эффективных характеристик

## Центральное сжатие С-профиля

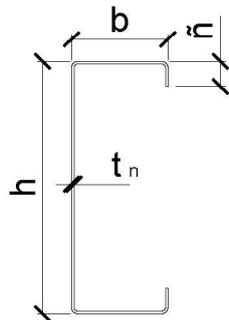
### 1. Свойства материала

Модуль упругости	$E := 210000 \text{ Мпа}$
Коэффициент Пуассона	$\nu := 0.3$
Модуль сдвига	$G := 80769 \text{ Мпа}$
Предел текучести	$f_{yb} := 255 \text{ Мпа}$
Коэффициент условия работы	$\gamma_{mo} := 1.0$
Упругое напряжение	$\varepsilon := 0.96$

$$\varepsilon := \sqrt{\frac{235}{f_{yb}}}$$

### 2. Размеры поперечного сечения

Высота стенки	$h := 150 \text{ мм}$
Ширина полки	$b := 50 \text{ мм}$
Ширина отгиба	$c := 15 \text{ мм}$
Номинальная толщина	$t_n := 1.2 \text{ мм}$
Расчетная толщина	$t := t_n - 0.04 \quad t = 1.16 \text{ мм}$
Радиус скругления (внутренний/внешний)	$r_i := 2 \cdot t_n \quad r_u := r_i + t_n$



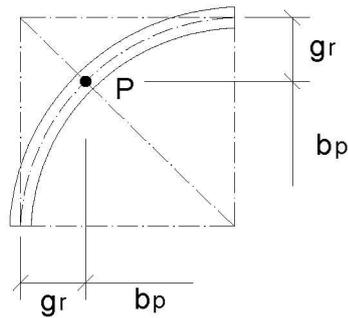
### 3. Геометрические характеристики

Средний радиус скругления:  $r_m := r_i + 0.5 \cdot t_n \quad r_m = 3 \text{ мм}$

	Внешние размеры	Размеры по центральной линии	Внутренние размеры
Стенка	$h = 150$	$h_c := h - t$	$h_i := h - t - 2 \cdot r_m$
Полка	$b = 50$	$b_c := b - t$	$b_i := b - t - 2 \cdot r_m$
Отгиб	$c = 15$	$c_c := c - \frac{t}{2}$	$c_i := b - 0.5t - r_m$

Влияние углов сгиба:

длина скругления	$u := 1.57 \cdot r_m$	$u = 4.71$
центр тяжести	$w := 0.363 \cdot r_m$	$w = 1.089$
	$v := 0.637 \cdot r_m$	$v = 1.911$
угол сгиба	$\varphi := 0.5 \cdot \pi$	



$$g_r := r_m \cdot (\tan(0.5 \cdot \varphi) - \sin(0.5 \cdot \varphi)) \quad g_r = 0.879 \text{ мм}$$

Размеры относительно точки P

$$h_p := h_c - 2 \cdot g_r \quad h_p = 147.083$$

$$b_p := b_c - 2 \cdot g_r \quad b_p = 47.083$$

$$c_p := c_c - g_r \quad c_p = 13.541$$

Углы :=  $\begin{cases} \text{"Острые углы"} & \text{if } r_i < 5 \cdot t_n \wedge r_i < 0.1 \cdot \min(h_p, b_p, c_p) \\ \text{"Скругленные углы"} & \text{otherwise} \end{cases}$

Углы = "Скругленные углы"

$$\delta := 0.43 \cdot \frac{8 \cdot r_i}{2 \cdot h_c + 4 \cdot b_c + 4 \cdot c_c} \quad \delta := \begin{cases} 0 & \text{if } r_i < 5 \cdot t_n \wedge r_i < 0.1 \cdot \min(h_p, b_p, c_p) \\ \delta & \text{otherwise} \end{cases} \quad \delta = 0.015$$

**Максимальные отношения ширины к толщине**

$$\frac{h}{t_n} = 125 < 500$$

$$\frac{b}{t_n} = 41.667 < 60$$

$$\frac{c}{t_n} = 12.5 < 50$$

$$\frac{c}{b} = 0.3 \quad \text{от } 0.2 \text{ до } 0.6$$

Профиль :=  $\begin{cases} \text{"проходит по EN 1993-1-3"} & \text{if } \frac{h}{t} \leq 500 \wedge \frac{b}{t} \leq 90 \wedge \frac{c}{b} \leq 0.6 \wedge \frac{c}{b} \geq 0.2 \wedge \frac{c}{t_n} \leq 50 \\ \text{"не проходит по EN 1993-1-3"} & \text{otherwise} \end{cases}$

Профиль = "проходит по EN 1993-1-3"

#### 4. Окончательные характеристики поперечного сечения

Окончательные характеристики поперечного сечения должны быть посчитаны с учетом влияния скругления углов:

$$A_g := (h_p + 2 \cdot b_p + 2 \cdot c_p + 4 \cdot u) \cdot t \quad A_g = 333.118 \text{ мм}^2$$

$$I_{yg} := h_p^3 \cdot \frac{t}{12} + 2 \cdot \left[ \frac{b_p \cdot t^3}{12} + b_p \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 \right] + 2 \cdot \left[ \frac{c_p^3 \cdot t}{12} + c_p \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - c_c + \frac{c_p}{2} \right)^2 \right] + 4 \cdot u \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - w \right)^2$$

$$I_{yg} = 1.171 \times 10^6 \text{ мм}^4$$

$$W_{el} := I_{yg} \cdot \left( \frac{h_c}{2} \right)^{-1} \quad W_{el} = 1.573 \times 10^4 \text{ мм}^3$$

**Функции:**      Отношение гибкости       $\lambda_p(w, k_\sigma) := \frac{w}{t} \cdot \frac{1}{28.4 \cdot \epsilon \cdot \sqrt{k_\sigma}}$

$$\rho_w(\lambda_p, \psi) := \begin{cases} \min \left[ \frac{\lambda_p - 0.055 \cdot (3 + \psi)}{\lambda_p^2}, 1 \right] & \text{if } \lambda_p \geq 0.673 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\rho_o(\lambda_p) := \begin{cases} \min\left[1, \left(1 - \frac{0.188}{\lambda_p}\right) \cdot \frac{1}{\lambda_p}\right] & \text{if } \lambda_p \geq 0.748 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\chi_{cd}(\lambda_d) := \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda_d \leq 0.65 \\ 1.47 - 0.723 \cdot \lambda_d & \text{if } \lambda_d > 0.65 \wedge \lambda_d < 1.38 \\ \frac{0.66}{\lambda_d} & \text{if } \lambda_d \geq 1.38 \end{cases}$$

## 5. Вычисление редуцированного сечения

Сжимающее напряжение  $\sigma_{com.Ed} := f_{yb} \cdot \gamma_{mo}^{-1}$   $\sigma_{com.Ed} = 255$  МПа

### Шаг 1. Определение эффективных размеров

#### Высота стенки h

$\psi := 1$   $k_{\sigma} := 4$   $\lambda_{ph} := \frac{h_p}{t} \cdot \frac{1}{28.4 \cdot \epsilon \cdot \sqrt{k_{\sigma}}}$   $\lambda_{ph} = 2.325$

$\rho := \min\left[1, \frac{\lambda_{ph} - 0.055 \cdot (3 + \psi)}{\lambda_{ph}^2}\right]$   $\rho = 0.389$   $h_{ef} := 0.5 \cdot \rho \cdot h_p + g_r$   $h_{ef} = 29.512$  мм

#### Ширина полки b

$\psi := 1$   $k_{\sigma} := 4$   $\lambda_{pb} := \frac{b_p}{t} \cdot \frac{1}{28.4 \cdot \epsilon \cdot \sqrt{k_{\sigma}}}$   $\lambda_{pb} = 0.744$

$\rho := \min\left[1, \frac{\lambda_{pb} - 0.055 \cdot (3 + \psi)}{\lambda_{pb}^2}\right]$   $\rho = 0.946$   $b_{ef1} := 0.5 \cdot \rho \cdot b_p + g_r$   $b_{ef2} := b_{ef1}$   $b_{ef1} = 23.157$  мм

#### Ширина отгиба c

$$k_{\sigma c} := \begin{cases} 0.5 & \text{if } \frac{c_p}{b_p} \leq 0.35 \\ 0.5 + 0.83 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{c_p}{b_p} - 0.35\right)^2} & \text{if } \frac{c_p}{b_p} \leq 0.6 \wedge \frac{c_p}{b_p} > 0.35 \end{cases} \quad k_{\sigma c} = 0.5$$

$\lambda_{pc} := \frac{c_p}{t} \cdot \frac{1}{28.4 \cdot \epsilon \cdot \sqrt{k_{\sigma c}}}$   $\lambda_{pc} = 0.606$   $\rho := \min\left[1, \left(1 - \frac{0.188}{\lambda_{pc}}\right) \cdot \frac{1}{\lambda_{pc}}\right]$   $\rho = 1$

$c_{ef} := \rho \cdot c_p + g_r$   $c_{ef} = 14.42$  мм

**Шаг 2. Определение эффективной площади с учетом редуцирующего коэффициента**

Эффективная площадь отгиба

Характеристики поперечного сечения отгиба(острые углы):

$$A_s := (b_{ef2} + c_{ef}) \cdot t \quad A_s = 43.59 \quad \text{мм}^2$$

$$y_s := \frac{t \cdot c_{ef}^2}{2 \cdot A_s} \quad y_s = 2.767 \quad z_c := \frac{t \cdot b_{ef2}^2}{2 \cdot A_s} \quad z_c = 7.135 \quad \text{мм}$$

$$I_s := \frac{1}{12} \cdot b_{ef2} \cdot t^3 + b_{ef2} \cdot t \cdot y_s^2 + \frac{1}{12} \cdot t \cdot c_{ef}^3 + c_{ef} \cdot t \cdot (0.5 \cdot c_{ef} - y_s)^2 \quad I_s = 828.728 \quad \text{мм}^4$$

Характеристики поперечного сечения отгиба(скругленные углы):

$$A_s := [(b_{ef2} - g_r) + (c_{ef} - g_r) + u] \cdot t \quad A_s = 47.015 \quad \text{мм}^2$$

$$y_s := \frac{t \cdot (c_{ef} - g_r) \cdot \left( g_r + \frac{c_{ef} - g_r}{2} \right) + t \cdot u \cdot w}{A_s} \quad y_s = 2.767 \quad \text{мм}$$

$$z_s := \frac{t \cdot (b_{ef2} - g_r) \cdot \left( g_r + \frac{b_{ef2} - g_r}{2} \right) + t \cdot u \cdot w}{A_s} \quad z_s = 6.733 \quad \text{мм}$$

$$I_s := \frac{1}{12} \cdot (b_{ef2} - g_r) \cdot t^3 + (b_{ef2} - g_r) \cdot t \cdot y_s^2 + \frac{1}{12} \cdot t \cdot (c_{ef} - g_r)^3 + (c_{ef} - g_r) \cdot t \cdot \left( g_r + \frac{c_{ef} - g_r}{2} - y_s \right)^2 + u \cdot t \cdot (y_s - w)^2 + \frac{r_m^3 \cdot t}{12} \quad I_s = 832.878 \quad \text{мм}^4$$

Определение жесткости отгиба, считая что он работает как балка на упругом основании:

$$K := \frac{E \cdot t^3}{4 \cdot (1 - \nu^2) \cdot (b_c - z_s)^2 \cdot h_c + (b_c - z_s)^3 + 0.5 \cdot [(b_c - z_s)^2 \cdot h_c] \cdot 1} \quad K = 0.191 \quad \text{Н} \cdot \text{мм}^{-2}$$

Критическое напряжение отгиба:

$$\sigma_{cr,s} := \frac{2 \cdot \sqrt{K \cdot E \cdot I_s}}{A_s} \quad \sigma_{cr,s} = 246.127 \quad \text{МПа}$$

Определение редуцирующего коэффициента для учета изменений формы при местной потере устойчивости отгиба:

$$\lambda_d := \sqrt{\frac{f_{yb}}{\sigma_{cr,s}}} \quad \lambda_d = 1.018$$

$$\chi_d := \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda_d \leq 0.65 \\ 1.47 - 0.723 \cdot \lambda_d & \text{if } \lambda_d > 0.65 \wedge \lambda_d < 1.38 \\ \frac{0.66}{\lambda_d} & \text{if } \lambda_d \geq 1.38 \end{cases} \quad \chi_d = 0.734$$

Редуцированная площадь отгиба:

$$A_{s,\text{red}} := \chi_d \cdot A_s \cdot \frac{f_{yb} \cdot \gamma_{mo}^{-1}}{\sigma_{\text{com.Ed}}} \quad A_{s,\text{red}} = 34.513 \text{ мм}^2$$

$$t_{s,\text{red}} := \frac{A_{s,\text{red}}}{(b_{\text{ef2}} - g_r) + (c_{\text{ef}} - g_r) + u} \quad t_{s,\text{red}} = 0.852 \text{ мм}$$

Редуцированная площадь поперечного сечения профиля(острые и скругленные углы)

$$A_{\text{eff}} := (2 \cdot h_{\text{ef}} + 2 \cdot b_{\text{ef1}}) \cdot t + 2 \cdot (b_{\text{ef2}} + c_{\text{ef}}) \cdot t_{s,\text{red}} \quad A_{\text{eff}} = 186.191 \text{ мм}^2$$

$$A_{\text{eff}} := 2 \cdot (h_{\text{ef}} - g_r) \cdot t + 2 \cdot (b_{\text{ef1}} - g_r) \cdot t + 2 \cdot u \cdot t + 2 \cdot (b_{\text{ef2}} - g_r) \cdot t_{s,\text{red}} + 2 \cdot (c_{\text{ef}} - g_r) \cdot t_{s,\text{red}} + 2 \cdot u \cdot t_{s,\text{red}} \quad A_{\text{eff}} = 198.069 \text{ мм}^2$$

Расчетная прочность сечения при осевом сжатии:

$$N_{c,\text{Rd}} := \frac{f_{yb} \cdot A_{\text{eff}}}{\gamma_{mo}} \quad N_{c,\text{Rd}} = 5.051 \times 10^4 \text{ Н}$$

### Шаг 3. Итерационный расчет.

#### Итерация 1

В итерационном расчете эффективные размеры должны быть посчитаны с учетом редуцированного сжимающего напряжения

$$\sigma_{\text{com.Ed}} := \chi_d \cdot f_{yb} \cdot \gamma_{mo}^{-1} \quad \sigma_{\text{com.Ed}} = 187.191 \text{ МПа}$$

$$\lambda_{p,\text{red.p}}(\lambda_p) := \lambda_p \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{\text{com.Ed}}}{\frac{f_{yb}}{\gamma_{mo}}}} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{p,\text{red}}(\lambda_p) := \lambda_p \cdot \sqrt{\chi_d}$$

#### Ширина полки b

$$\lambda_{pb.1} := \lambda_{p,\text{red}}(\lambda_{pb}) \quad \lambda_{pb.1} = 0.638 \quad \rho := \rho_w(\lambda_{pb.1}, 1) \quad \rho = 1$$

$$b_{\text{ef2}} := 0.5 \cdot \rho \cdot b_p + g_r \quad b_{\text{ef2}} = 24.42 \text{ мм}$$

#### Ширина отгиба c

$$\lambda_{pc.1} := \lambda_{p,\text{red}}(\lambda_{pc}) \quad \lambda_{pc.1} = 0.519 \quad \rho := \rho_o(\lambda_{pb.1}) \quad \rho = 1$$

$$c_{\text{ef}} := \rho \cdot c_p + g_r \quad c_{\text{ef}} = 14.42 \text{ мм}$$

#### Эффективная площадь отгиба

Характеристики поперечного сечения отгиба(острые углы):

$$A_s := (b_{\text{ef2}} + c_{\text{ef}}) \cdot t \quad A_s = 45.054 \text{ мм}^2$$

$$y_s := \frac{t \cdot c_{ef}^2}{2 \cdot A_s} \quad y_s = 2.677 \quad z_c := \frac{t \cdot b_{ef2}^2}{2 \cdot A_s} \quad z_c = 7.677 \text{ мм}$$

$$I_s := \frac{1}{12} \cdot b_{ef2} \cdot t^3 + b_{ef2} \cdot t \cdot y_s^2 + \frac{1}{12} \cdot t \cdot c_{ef}^3 + c_{ef} \cdot t \cdot (0.5 \cdot c_{ef} - y_s)^2 \quad I_s = 839.74 \text{ мм}^4$$

Характеристики поперечного сечения отгиба(скругленные углы):

$$A_s := [(b_{ef2} - g_r) + (c_{ef} - g_r) + u] \cdot t \quad A_s = 48.479 \text{ мм}^2$$

$$y_s := \frac{t \cdot (c_{ef} - g_r) \cdot \left( g_r + \frac{c_{ef} - g_r}{2} \right) + t \cdot u \cdot w}{A_s} \quad y_s = 2.601 \text{ мм}$$

$$z_s := \frac{t \cdot (b_{ef2} - g_r) \cdot \left( g_r + \frac{b_{ef2} - g_r}{2} \right) + t \cdot u \cdot w}{A_s} \quad z_s = 7.248 \text{ мм}$$

$$I_s := \frac{1}{12} \cdot (b_{ef2} - g_r) \cdot t^3 + (b_{ef2} - g_r) \cdot t \cdot y_s^2 + \frac{1}{12} \cdot t \cdot (c_{ef} - g_r)^3 + (c_{ef} - g_r) \cdot t \cdot \left( g_r + \frac{c_{ef} - g_r}{2} - y_s \right)^2 + u \cdot t \cdot (y_s - w)^2 + \frac{r_m^3 \cdot t}{12} \quad I_s = 843.261 \text{ мм}^4$$

Определение жесткости отгиба, считая что он работает как балка на упругом основании:

$$K := \frac{E \cdot t^3}{4 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{1}{(b_c - z_s)^2 \cdot h_c + (b_c - z_s)^3 + 0.5 \cdot [(b_c - z_s)^2 \cdot h_c] \cdot 1} \quad K = 0.197 \text{ Н} \cdot \text{мм}^{-2}$$

Критическое напряжение отгиба:

$$\sigma_{cr.s} := \frac{2 \cdot \sqrt{K \cdot E \cdot I_s}}{A_s} \quad \sigma_{cr.s} = 243.387 \text{ МПа}$$

Определение редуцирующего коэффициента для учета изменений формы при местной потере устойчивости отгиба:

$$\lambda_d := \sqrt{\frac{f_{yb}}{\sigma_{cr.s}}} \quad \lambda_d = 1.024 \quad \chi_{d.1} := \chi_{cd}(\lambda_d)$$

$$\chi_{d.1} = 0.73 < \chi_d = 0.734 \quad \text{Условие выполнено}$$

Итерационный расчет должен быть закончен, когда  $\chi(n) = \mu \cdot \chi \cdot (n-1)$ , но  $\chi(n) \leq \chi \cdot (n-1)$

$$\sigma_{com.Ed.1} := \chi_{d.1} \cdot f_{yb} \cdot \gamma_{mo}^{-1} \quad \sigma_{com.Ed.1} = 186.138 \text{ МПа} \quad \sigma_{com.Ed} = 187.191 \text{ МПа}$$

Редуцированная площадь отгиба:

$$A_{s.red} := \chi_{d.1} \cdot A_s \cdot \frac{f_{yb} \cdot \gamma_{mo}^{-1}}{\sigma_{com.Ed}} \quad A_{s.red} = 48.207 \text{ мм}^2$$

$$t_{s,red} := \frac{A_{s,red}}{(b_{ef2} - g_r) + (c_{ef} - g_r) + u} \quad t_{s,red} = 1.153 \text{ мм}$$

Редуцированная площадь поперечного сечения профиля(скругленные углы)

$$A_{eff,1} := 2 \cdot (h_{ef} - g_r) \cdot t + 2 \cdot (b_{ef1} - g_r) \cdot t + 2 \cdot u \cdot t + 2 \cdot (b_{ef2} - g_r) \cdot t_{s,red} + 2 \cdot (c_{ef} - g_r) \cdot t_{s,red} + 2 \cdot u \cdot t_{s,red}$$

$$A_{eff,1} = 225.457 \text{ мм}^2$$

Расчетная прочность сечения при осевом сжатии:

$$N_{c,Rd,1} := \frac{f_{yb} \cdot A_{eff,1}}{\gamma_{mo}} \quad N_{c,Rd,1} = 57491.536 \text{ Н}$$

## Итерация 2

В итерационном расчете эффективные размеры должны быть посчитаны с учетом редуцированного сжимающего напряжения

$$\sigma_{com.Ed} := \chi_{d,1} \cdot f_{yb} \cdot \gamma_{mo}^{-1} \quad \sigma_{com.Ed} = 186.138 \text{ МПа}$$

$$\lambda_{p,red,p}(\lambda_p) := \lambda_p \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{com.Ed}}{\frac{f_{yb}}{\gamma_{mo}}}} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{p,red}(\lambda_p) := \lambda_p \cdot \sqrt{\chi_d}$$

### Ширина полки b

$$\lambda_{pb,1} := \lambda_{p,red}(\lambda_{pb}) \quad \lambda_{pb,1} = 0.638 \quad \rho := \rho_w(\lambda_{pb,1}, 1) \quad \rho = 1$$

$$b_{ef2} := 0.5 \cdot \rho \cdot b_p + g_r \quad b_{ef2} = 24.42 \text{ мм}$$

### Ширина отгиба c

$$\lambda_{pc,1} := \lambda_{p,red}(\lambda_{pc}) \quad \lambda_{pc,1} = 0.519 \quad \rho := \rho_o(\lambda_{pb,1}) \quad \rho = 1$$

$$c_{ef} := \rho \cdot c_p + g_r \quad c_{ef} = 14.42 \text{ мм}$$

### Эффективная площадь отгиба

Характеристики поперечного сечения отгиба(скругленные углы):

$$A_s := [(b_{ef2} - g_r) + (c_{ef} - g_r) + u] \cdot t \quad A_s = 48.479 \text{ мм}^2$$

$$y_s := \frac{t \cdot (c_{ef} - g_r) \cdot \left( g_r + \frac{c_{ef} - g_r}{2} \right) + t \cdot u \cdot w}{A_s} \quad y_s = 2.601 \text{ мм}$$

$$z_s := \frac{t \cdot (b_{ef2} - g_r) \cdot \left( g_r + \frac{b_{ef2} - g_r}{2} \right) + t \cdot u \cdot w}{A_s} \quad z_s = 7.248 \text{ мм}$$

$$I_s := \frac{1}{12} \cdot (b_{ef2} - g_r) \cdot t^3 + (b_{ef2} - g_r) \cdot t \cdot y_s^2 + \frac{1}{12} \cdot t \cdot (c_{ef} - g_r)^3 \dots$$

$$+ (c_{ef} - g_r) \cdot t \cdot \left( g_r + \frac{c_{ef} - g_r}{2} - y_s \right)^2 + u \cdot t \cdot (y_s - w)^2 + \frac{r_m^3 \cdot t}{12}$$

$$I_s = 843.261 \quad \text{мм}^4$$

Определение жесткости отгиба, считая что он работает как балка на упругом основании:

$$K := \frac{E \cdot t^3}{4 \cdot (1 - \nu^2) \cdot (b_c - z_s)^2 \cdot h_c + (b_c - z_s)^3 + 0.5 \cdot [(b_c - z_s)^2 \cdot h_c] \cdot 1}$$

$$K = 0.197 \quad \text{Н} \cdot \text{мм}^{-2}$$

Критическое напряжение отгиба:

$$\sigma_{cr.s} := \frac{2 \cdot \sqrt{K \cdot E \cdot I_s}}{A_s}$$

$$\sigma_{cr.s} = 243.387 \quad \text{МПа}$$

Определение редуцирующего коэффициента для учета изменений формы при местной потере устойчивости отгиба:

$$\lambda_d := \sqrt{\frac{f_{yb}}{\sigma_{cr.s}}} \quad \lambda_d = 1.024 \quad \chi_{d,2} := \chi_{cd}(\lambda_d)$$

$$\chi_{d,2} = 0.73 \quad = \blacksquare \quad \chi_{d,1} = 0.73 \quad \text{Условие выполнено}$$

Итерационный расчет должен быть закончен, когда  $\chi(n) = \blacksquare \cdot \chi \cdot (n-1)$ , но  $\chi(n) \leq \chi \cdot (n-1)$

$$\sigma_{com.Ed.1} := \chi_{d,2} \cdot f_{yb} \cdot \gamma_{mo}^{-1} \quad \sigma_{com.Ed.1} = 186.138 \quad \text{МПа} \quad \sigma_{com.Ed} = 186.138 \quad \text{МПа}$$

Редуцированная площадь отгиба:

$$A_{s.red} := \chi_{d,2} \cdot A_s \cdot \frac{f_{yb} \cdot \gamma_{mo}^{-1}}{\sigma_{com.Ed}}$$

$$A_{s.red} = 48.479 \quad \text{мм}^2$$

$$t_{s.red} := \frac{A_{s.red}}{(b_{ef2} - g_r) + (c_{ef} - g_r) + u}$$

$$t_{s.red} = 1.16 \quad \text{мм}$$

Редуцированная площадь поперечного сечения профиля(скругленные углы)

$$A_{eff.2} := 2 \cdot (h_{ef} - g_r) \cdot t + 2 \cdot (b_{ef1} - g_r) \cdot t + 2 \cdot u \cdot t + 2 \cdot (b_{ef2} - g_r) \cdot t_{s.red} + 2 \cdot (c_{ef} - g_r) \cdot t_{s.red} + 2 \cdot u \cdot t_{s.red}$$

$$A_{eff.2} = 226.003 \quad \text{мм}^2$$

Расчетная прочность сечения при осевом сжатии:

$$N_{c.Rd.2} := \frac{f_{yb} \cdot A_{eff.2}}{\gamma_{mo}}$$

$$N_{c.Rd.2} = 57630.7 \quad \text{Н}$$

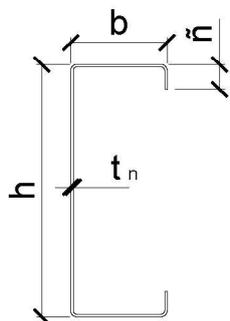
## Изгиб С-профиля

### 1. Свойства материала

Модуль упругости	$E := 21000 \text{ Мпа}$
Коэффициент Пуассона	$\nu := 0.3$
Модуль сдвига	$G := 80769 \text{ Мпа}$
Предел текучести	$f_{yb} := 255 \text{ Мпа}$
Коэффициент условия работы	$\gamma_{mo} := 1.0$
Упругое напряжение	$\varepsilon := \sqrt{\frac{235}{f_{yb}}}$ $\varepsilon = 0.96$

### 2. Размеры поперечного сечения

Высота стенки	$h := 150 \text{ мм}$
Ширина полки	$b := 50 \text{ мм}$
Ширина отгиба	$c := 15 \text{ мм}$
Номинальная толщина	$t_n := 1.2 \text{ мм}$
Расчетная толщина	$t := t_n - 0.04 \quad t = 1.16 \text{ мм}$
Радиус скругления (внутренний/внешний)	$r_i := 2 \cdot t_n \quad r_u := r_i + t_n$



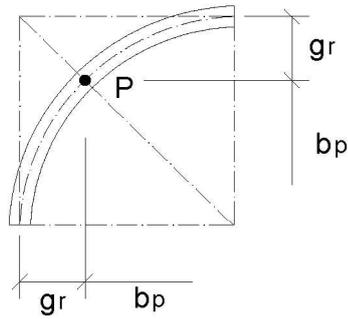
### 3. Геометрические характеристики

Средний радиус скругления:  $r_m := r_i + 0.5 \cdot t_n \quad r_m = 3 \text{ мм}$

	Внешние размеры	Размеры по центральной линии	Внутренние размеры
Стенка	$h = 150$	$h_c := h - t$	$h_i := h - t - 2 \cdot r_m$
Полка	$b = 50$	$b_c := b - t$	$b_i := b - t - 2 \cdot r_m$
Отгиб	$c = 15$	$c_c := c - \frac{t}{2}$	$c_i := b - 0.5t - r_m$

Влияние углов сгиба:

длина скругления	$u := 1.57 \cdot r_m$	$u = 4.71$
центр тяжести	$w := 0.363 \cdot r_m$	$w = 1.089$
	$v := 0.637 \cdot r_m$	$v = 1.911$
угол сгиба	$\varphi := 0.5 \cdot \pi$	



$$g_r := r_m \cdot (\tan(0.5 \cdot \varphi) - \sin(0.5 \cdot \varphi)) \quad g_r = 0.879 \text{ мм}$$

Размеры относительно точки P

$$h_p := h_c - 2 \cdot g_r \quad h_p = 147.083$$

$$b_p := b_c - 2 \cdot g_r \quad b_p = 47.083$$

$$c_p := c_c - g_r \quad c_p = 13.541$$

Углы :=  $\begin{cases} \text{"Острые углы"} & \text{if } r_1 < 5 \cdot t_n \wedge r_1 < 0.1 \cdot \min(h_p, b_p, c_p) \\ \text{"Скругленные углы"} & \text{otherwise} \end{cases}$  Углы = "Скругленные углы"

$$\delta := 0.43 \cdot \frac{8 \cdot r_1}{2 \cdot h_c + 4 \cdot b_c + 4 \cdot c_c} \quad \delta := \begin{cases} 0 & \text{if } r_1 < 5 \cdot t_n \wedge r_1 < 0.1 \cdot \min(h_p, b_p, c_p) \\ \delta & \text{otherwise} \end{cases} \quad \delta = 0.015$$

**Максимальные отношения ширины к толщине**

$$\frac{h}{t_n} = 125 < 500$$

$$\frac{b}{t_n} = 41.667 < 60$$

$$\frac{c}{t_n} = 12.5 < 50$$

$$\frac{c}{b} = 0.3 \quad \text{от } 0.2 \text{ до } 0.6$$

Профиль :=  $\begin{cases} \text{"проходит по EN 1993-1-3"} & \text{if } \frac{h}{t} \leq 500 \wedge \frac{b}{t} \leq 90 \wedge \frac{c}{b} \leq 0.6 \wedge \frac{c}{b} \geq 0.2 \wedge \frac{c}{t_n} \leq 50 \\ \text{"не проходит по EN 1993-1-3"} & \text{otherwise} \end{cases}$

Профиль = "проходит по EN 1993-1-3"

#### 4. Окончательные характеристики поперечного сечения

Окончательные характеристики поперечного сечения должны быть посчитаны с учетом влияния скругления углов:

$$A_g := (h_p + 2 \cdot b_p + 2 \cdot c_p + 4 \cdot u) \cdot t \quad A_g = 333.118 \text{ мм}^2$$

$$I_{yg} := h_p^3 \cdot \frac{t}{12} + 2 \cdot \left[ \frac{b_p^3 \cdot t}{12} + b_p \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 \right] + 2 \cdot \left[ \frac{c_p^3 \cdot t}{12} + c_p \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - c_c + \frac{c_p}{2} \right)^2 \right] + 4 \cdot u \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - w \right)^2$$

$$I_{yg} = 1.171 \times 10^6 \text{ мм}^4$$

$$W_{el} := I_{yg} \cdot \left( \frac{h_c}{2} \right)^{-1}$$

$$W_{el} = 1.573 \times 10^4 \text{ мм}^3$$

**Функции:** Отношение гибкости  $\lambda_p(w, k_\sigma) := \frac{w}{t} \cdot \frac{1}{28.4 \cdot \epsilon \cdot \sqrt{k_\sigma}}$

$$\rho_w(\lambda_p, \psi) := \begin{cases} \min \left[ \frac{\lambda_p - 0.055 \cdot (3 + \psi)}{\lambda_p^2}, 1 \right] & \text{if } \lambda_p \geq 0.673 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\rho_o(\lambda_p) := \begin{cases} \min\left[1, \left(1 - \frac{0.188}{\lambda_p}\right) \cdot \frac{1}{\lambda_p}\right] & \text{if } \lambda_p \geq 0.748 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\chi_{cd}(\lambda_d) := \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda_d \leq 0.65 \\ 1.47 - 0.723 \cdot \lambda_d & \text{if } \lambda_d > 0.65 \wedge \lambda_d < 1.38 \\ \frac{0.66}{\lambda_d} & \text{if } \lambda_d \geq 1.38 \end{cases}$$

## 5. Вычисление редуцированного сечения

Сжимающее напряжение  $\sigma_{\text{com.Ed}} := f_{yb} \cdot \gamma_{mo}^{-1}$   $\sigma_{\text{com.Ed}} = 255$  МПа

### Шаг 1. Определение эффективных размеров

#### Ширина полки b

$$\psi := 1 \quad k_{\sigma} := 4 \quad \lambda_{pb} := \frac{b_p}{t} \cdot \frac{1}{28.4 \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{k_{\sigma}}} \quad \lambda_{pb} = 0.744$$

$$\rho := \min\left[1, \frac{\lambda_{pb} - 0.055 \cdot (3 + \psi)}{\lambda_{pb}^2}\right] \quad \rho = 0.946 \quad b_{\text{ef1}} := 0.5 \cdot \rho \cdot b_p + g_r \quad b_{\text{ef2}} := b_{\text{ef1}} \quad b_{\text{ef1}} = 23.15 \text{ мм}$$

#### Ширина отгиба c

$$k_{\sigma c} := \begin{cases} 0.5 & \text{if } \frac{c_p}{b_p} \leq 0.35 \\ 0.5 + 0.83 \cdot \sqrt{\left(\frac{c_p}{b_p} - 0.35\right)^2} & \text{if } \frac{c_p}{b_p} \leq 0.6 \wedge \frac{c_p}{b_p} > 0.35 \end{cases} \quad k_{\sigma c} = 0.5$$

$$\lambda_{pc} := \frac{c_p}{t} \cdot \frac{1}{28.4 \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{k_{\sigma c}}} \quad \lambda_{pc} = 0.606 \quad \rho := \min\left[1, \left(1 - \frac{0.188}{\lambda_{pc}}\right) \cdot \frac{1}{\lambda_{pc}}\right] \quad \rho = 1$$

$$c_{\text{ef}} := \rho \cdot c_p + g_r \quad c_{\text{ef}} = 14.42 \text{ мм}$$

#### Влияние соотношения $\sigma_2/\sigma_1$ :

Изменение центра тяжести по оси z (скругленные углы)

$$z_{\text{nr}} := \frac{(b_c - b_{\text{ef1}} - b_{\text{ef2}}) \cdot t \cdot \frac{h_c}{2} + (c_c - c_{\text{ef}}) \cdot t \cdot \left(\frac{h_c}{2} - \frac{c_{\text{ef}}}{2}\right)}{t \cdot [h_p + b_p + c_p + (b_{\text{ef1}} - g_r) + (b_{\text{ef2}} - g_r) + (c_{\text{ef}} - g_r) + 4 \cdot u]} \quad z_{\text{nr}} = -0.66 \text{ мм}$$

Изменение центра тяжести по оси z (острые углы)

$$z_{ns} := -\frac{(b_c - b_{ef1} - b_{ef2}) \cdot t \cdot \frac{h_c}{2} + (c_c - c_{ef}) \cdot t \cdot \left(\frac{h_c}{2} - \frac{c_{ef}}{2}\right)}{t \cdot (h_c + b_c + c_c + b_{ef1} + b_{ef2} + c_{ef})} \quad z_{ns} = -0.689 \text{ мм}$$

$$\psi := -\left(\frac{h_c}{2} + z_{nr}\right) \cdot \left(\frac{h_c}{2} - z_{nr}\right)^{-1} \quad \psi = -0.982$$

Высота стенки h

$$k_{\sigma} := 7.81 - 6.29\psi + 9.78\psi^2 \quad k_{\sigma} = 23.428 \quad \lambda_{ph} := \frac{h_p}{t} \cdot \frac{1}{28.4 \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{k_{\sigma}}} \quad \lambda_{ph} = 0.961$$

$$\rho := \min\left[1, \frac{\lambda_{ph} - 0.055 \cdot (3 + \psi)}{\lambda_{ph}^2}\right] \quad \rho = 0.921 \quad h_{eff} := \rho \cdot \frac{h_p}{1 - \psi} \quad h_{eff} = 68.3 \text{ мм}$$

$$h_{ef1} := 0.4 \cdot h_{eff} + g_r \quad h_{ef1} = 28.199 \text{ мм}$$

$$h_{ef2} := 0.6 \cdot h_{eff} + g_r + \left(h_p - \frac{h_p}{1 - \psi}\right) \quad h_{ef2} = 114.748 \text{ мм}$$

**Шаг 2. Определение эффективной площади с учетом редуцирующего коэффициента**

Эффективная площадь отгиба

Характеристики поперечного сечения отгиба(скругленные углы):

$$A_s := \left[(b_{ef2} - g_r) + (c_{ef} - g_r) + u\right] \cdot t \quad A_s = 47.015 \text{ мм}^2$$

$$y_s := \frac{t \cdot (c_{ef} - g_r) \cdot \left(g_r + \frac{c_{ef} - g_r}{2}\right) + t \cdot u \cdot w}{A_s} \quad y_s = 2.682 \text{ мм}$$

$$z_s := \frac{t \cdot (b_{ef2} - g_r) \cdot \left(g_r + \frac{b_{ef2} - g_r}{2}\right) + t \cdot u \cdot w}{A_s} \quad z_s = 6.733 \text{ мм}$$

$$I_s := \frac{1}{12} \cdot (b_{ef2} - g_r) \cdot t^3 + (b_{ef2} - g_r) \cdot t \cdot y_s^2 + \frac{1}{12} \cdot t \cdot (c_{ef} - g_r)^3 + (c_{ef} - g_r) \cdot t \cdot \left(g_r + \frac{c_{ef} - g_r}{2} - y_s\right)^2 + u \cdot t \cdot (y_s - w)^2 + \frac{r_m^3 \cdot t}{12} \quad I_s = 832.878 \text{ мм}^4$$

Определение жесткости отгиба, считая что он работает как балка на упругом основании. Если другая полка растянута, то  $k_f=0$ :

$$K := \frac{E \cdot t^3}{4 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{1}{(b_c - z_s)^2 \cdot h_c + (b_c - z_s)^3 + 0.5 \cdot [(b_c - z_s)^2 \cdot h_c] \cdot 0} \quad K = 0.266 \text{ Н} \cdot \text{мм}^{-2}$$

Критическое напряжение отгиба:

$$\sigma_{cr,s} := \frac{2 \cdot \sqrt{K \cdot E \cdot I_s}}{A_s} \quad \sigma_{cr,s} = 290.153 \text{ МПа}$$

Определение редуцирующего коэффициента для учета изменений формы при местной потере устойчивости отгиба:

$$\lambda_d := \sqrt{\frac{f_{yb}}{\sigma_{cr,s}}} \quad \chi_d := \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda_d \leq 0.65 \\ 1.47 - 0.723 \cdot \lambda_d & \text{if } \lambda_d > 0.65 \wedge \lambda_d < 1.38 \\ \frac{0.66}{\lambda_d} & \text{if } \lambda_d \geq 1.38 \end{cases} \quad \chi_d = 0.792$$

$$\lambda_d = 0.937$$

Редуцированная площадь отгиба:

$$A_{s,red} := \chi_d \cdot A_s \cdot \frac{f_{yb} \cdot \gamma_{mo}^{-1}}{\sigma_{com.Ed}} \quad A_{s,red} = 37.246 \text{ мм}^2$$

$$t_{s,red} := \frac{A_{s,red}}{(b_{ef2} - g_r) + (c_{ef} - g_r) + u} \quad t_{s,red} = 0.919 \text{ мм}$$

Редуцированная площадь поперечного сечения профиля

$$A_{eff,b} := t \cdot [c_p + b_p + (h_{ef2} - g_r) + (h_{ef1} - g_r) + 3 \cdot u] + t_{s,red} \cdot [u + (b_{ef2} - g_r) + (c_{ef} - g_r)]$$

$$A_{eff,b} = 287.739 \text{ мм}^2$$

Центр тяжести эффективного поперечного сечения сжатой полки

$$z_1 := \frac{1}{A_{eff,b}} \cdot \left[ c_p \cdot t \cdot \left( h_c - \frac{c_c}{2} \right) + b_p \cdot t \cdot h_c + 2 \cdot u \cdot t \cdot (h_c - w) + (h_{ef2} - g_r) \cdot t \cdot \left( h_c - \frac{h_{ef2}}{2} \right) \dots \right]$$

$$\left[ + (h_{ef1} - g_r) \cdot t \cdot \frac{h_{ef1}}{2} + (c_{ef} - g_r) \cdot t_{s,red} \cdot \frac{c_{ef}}{2} + u \cdot t \cdot w + u \cdot t_{s,red} \cdot w \right]$$

$$z_1 = 85.484 \text{ мм}$$

$$z_2 := h_c - z_1$$

$$z_2 = 63.356 \text{ мм}$$

$$\begin{aligned}
I_{\text{eff.y}} := & \frac{c_p^3 \cdot t}{12} + c_p \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - c_c + \frac{c_p}{2} \right)^2 + \frac{b_p \cdot t^3}{12} + b_p \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 + 2 \cdot u \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - w \right)^2 \dots \\
& + \frac{(h_{\text{ef2}} - g_r)^3 \cdot t}{12} + (h_{\text{ef2}} - g_r) \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - \frac{h_{\text{ef2}}}{2} \right)^2 \dots \\
& + \frac{(h_{\text{ef1}} - g_r)^3 \cdot t}{12} + (h_{\text{ef1}} - g_r) \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - \frac{h_{\text{ef1}}}{2} \right)^2 + u \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - w \right)^2 \dots \\
& + \frac{(b_{\text{ef1}} - g_r) \cdot t^3}{12} + (b_{\text{ef1}} - g_r) \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 \dots \\
& + \frac{(b_{\text{ef2}} - g_r) \cdot t_{\text{s.red}}^3}{12} + (b_{\text{ef2}} - g_r) \cdot t_{\text{s.red}} \cdot \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 \dots \\
& + \frac{(c_{\text{ef}} - g_r)^3 \cdot t_{\text{s.red}}}{12} + (c_{\text{ef}} - g_r) \cdot t_{\text{s.red}} \cdot \left( \frac{h_c}{2} - c_c + \frac{c_{\text{ef}} - g_r}{2} \right)^2
\end{aligned}$$

$$I_{\text{eff.y}} = 1.071 \times 10^6 \text{ мм}^4$$

$$W_{\text{eff.y}} := \frac{I_{\text{eff.y}}}{z_1}$$

$$W_{\text{eff.y}} = 1.253 \times 10^4 \text{ мм}^3$$

Максимально допустимый изгибающий момент:

$$M_{\text{c.Rd}} := \frac{f_{\text{yb}} \cdot W_{\text{eff.y}}}{1000 \cdot \gamma_{\text{mo}}}$$

$$M_{\text{c.Rd}} = 3.196 \times 10^3 \text{ Н·м}$$

### Шаг 3. Итерационный расчет.

#### Итерация 1

В итерационном расчете эффективные размеры должны быть посчитаны с учетом редуцированного сжимающего напряжения

$$\sigma_{\text{com.Ed}} := \chi_d \cdot f_{\text{yb}} \cdot \gamma_{\text{mo}}^{-1}$$

$$\sigma_{\text{com.Ed}} = 202.014 \text{ МПа}$$

$$\lambda_{\text{p.red.p}}(\lambda_p) := \lambda_p \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{\text{com.Ed}}}{\frac{f_{\text{yb}}}{\gamma_{\text{mo}}}}} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{\text{p.red}}(\lambda_p) := \lambda_p \cdot \sqrt{\chi_d}$$

#### Ширина полки b

$$\begin{aligned}
\lambda_{\text{pb.1}} := \lambda_{\text{p.red}}(\lambda_{\text{pb}}) \quad \lambda_{\text{pb.1}} = 0.663 \quad \rho := \rho_w(\lambda_{\text{pb.1}}, 1) \quad \rho = 1 \\
b_{\text{ef2}} := 0.5 \cdot \rho \cdot b_p + g_r \quad b_{\text{ef2}} = 24.42 \text{ мм}
\end{aligned}$$

#### Ширина отгиба c

$$\begin{aligned}
\lambda_{\text{pc.1}} := \lambda_{\text{p.red}}(\lambda_{\text{pc}}) \quad \lambda_{\text{pc.1}} = 0.539 \quad \rho := \rho_o(\lambda_{\text{pb.1}}) \quad \rho = 1 \\
c_{\text{ef}} := \rho \cdot c_p + g_r \quad c_{\text{ef}} = 14.42 \text{ мм}
\end{aligned}$$

### Эффективная площадь отгиба

Характеристики поперечного сечения отгиба(скругленные углы):

$$\Lambda_s := \left[ (b_{ef2} - g_r) + (c_{ef} - g_r) + u \right] \cdot t \quad \Lambda_s = 48.479 \text{ мм}^2$$

$$y_s := \frac{t \cdot (c_{ef} - g_r) \cdot \left( g_r + \frac{c_{ef} - g_r}{2} \right) + t \cdot u \cdot w}{\Lambda_s} \quad y_s = 2.601 \text{ мм}$$

$$z_s := \frac{t \cdot (b_{ef2} - g_r) \cdot \left( g_r + \frac{b_{ef2} - g_r}{2} \right) + t \cdot u \cdot w}{\Lambda_s} \quad z_s = 7.248 \text{ мм}$$

$$I_s := \frac{1}{12} \cdot (b_{ef2} - g_r) \cdot t^3 + (b_{ef2} - g_r) \cdot t \cdot y_s^2 + \frac{1}{12} \cdot t \cdot (c_{ef} - g_r)^3 + (c_{ef} - g_r) \cdot t \cdot \left( g_r + \frac{c_{ef} - g_r}{2} - y_s \right)^2 + u \cdot t \cdot (y_s - w)^2 + \frac{r_m^3 \cdot t}{12} \quad I_s = 843.261 \text{ мм}^4$$

Определение жесткости отгиба, считая что он работает как балка на упругом основании. Если другая полка растянута, то  $k_f=0$ :

$$K := \frac{E \cdot t^3}{4 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{1}{(b_c - z_s)^2 \cdot h_c + (b_c - z_s)^3 + 0.5 \cdot [(b_c - z_s)^2 \cdot h_c] \cdot 0} \quad K = 0.273 \text{ Н} \cdot \text{мм}^{-2}$$

Критическое напряжение отгиба:

$$\sigma_{cr,s} := \frac{2 \cdot \sqrt{K \cdot E \cdot I_s}}{\Lambda_s} \quad \sigma_{cr,s} = 287.031 \text{ МПа}$$

Определение редуцирующего коэффициента для учета изменений формы при местной потере устойчивости отгиба:

$$\lambda_d := \sqrt{\frac{f_{yb}}{\sigma_{cr,s}}} \quad \lambda_d = 0.943 \quad \chi_{d,1} := \chi_{cd}(\lambda_d)$$

$$\chi_{d,1} = 0.789 < \chi_d = 0.792 \quad \text{Условие выполнено}$$

Итерационный расчет должен быть закончен, когда  $\chi(n) = \alpha \cdot \chi(n-1)$ , но  $\chi(n) \leq \chi(n-1)$

$$\sigma_{com.Ed,1} := \chi_{d,1} \cdot f_{yb} \cdot \gamma_{mo}^{-1} \quad \sigma_{com.Ed,1} = 201.076 \text{ МПа} \quad \sigma_{com.Ed} = 202.014 \text{ МПа}$$

Редуцированная площадь отгиба:

$$\Lambda_{s,red} := \chi_{d,1} \cdot \Lambda_s \cdot \frac{f_{yb} \cdot \gamma_{mo}^{-1}}{\sigma_{com.Ed}} \quad \Lambda_{s,red} = 48.254 \text{ мм}^2$$

$$t_{s.red} := \frac{A_{s.red}}{(b_{ef2} - g_r) + (c_{ef} - g_r) + u} \quad t_{s.red} = 1.155 \text{ мм}$$

Редуцированная площадь поперечного сечения профиля

$$A_{eff.b} := t \cdot [c_p + b_p + (h_{ef2} - g_r) + (h_{ef1} - g_r) + 3 \cdot u] + t_{s.red} \cdot [u + (b_{ef2} - g_r) + (c_{ef} - g_r)]$$

$$A_{eff.b} = 298.748 \text{ мм}^2$$

Центр тяжести эффективного поперечного сечения сжатой полки

$$z_1 := \frac{1}{A_{eff.b}} \cdot \left[ c_p \cdot t \cdot \left( h_c - \frac{c_c}{2} \right) + b_p \cdot t \cdot h_c + 2 \cdot u \cdot t \cdot (h_c - w) + (h_{ef2} - g_r) \cdot t \cdot \left( h_c - \frac{h_{ef2}}{2} \right) \dots \right]$$

$$\left[ + (h_{ef1} - g_r) \cdot t \cdot \frac{h_{ef1}}{2} + (c_{ef} - g_r) \cdot t_{s.red} \cdot \frac{c_{ef}}{2} + u \cdot t \cdot w + u \cdot t_{s.red} \cdot w \right]$$

$$z_1 = 82.415 \text{ мм}$$

$$z_2 := h_c - z_1$$

$$z_2 = 66.425 \text{ мм}$$

$$I_{eff.y} := \frac{c_p^3 \cdot t}{12} + c_p \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - c_c + \frac{c_p}{2} \right)^2 + \frac{b_p \cdot t^3}{12} + b_p \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 + 2 \cdot u \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - w \right)^2 \dots$$

$$+ \frac{(h_{ef2} - g_r)^3 \cdot t}{12} + (h_{ef2} - g_r) \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - \frac{h_{ef2}}{2} \right)^2 \dots$$

$$+ \frac{(h_{ef1} - g_r)^3 \cdot t}{12} + (h_{ef1} - g_r) \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - \frac{h_{ef1}}{2} \right)^2 + u \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - w \right)^2 \dots$$

$$+ \frac{(b_{ef1} - g_r) \cdot t^3}{12} + (b_{ef1} - g_r) \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 \dots$$

$$+ \frac{(b_{ef2} - g_r) \cdot t_{s.red}^3}{12} + (b_{ef2} - g_r) \cdot t_{s.red} \cdot \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 \dots$$

$$+ \frac{(c_{ef} - g_r)^3 \cdot t_{s.red}}{12} + (c_{ef} - g_r) \cdot t_{s.red} \cdot \left( \frac{h_c}{2} - c_c + \frac{c_{ef} - g_r}{2} \right)^2$$

$$I_{eff.y} = 1.123 \times 10^6 \text{ мм}^4$$

$$W_{eff.y} := \frac{I_{eff.y}}{z_1}$$

$$W_{eff.y} = 1.363 \times 10^4 \text{ мм}^3$$

Максимально допустимый изгибающий момент:

$$M_{c.Rd.1} := \frac{f_{yb} \cdot W_{eff.y}}{1000 \cdot \gamma_{mo}}$$

$$M_{c.Rd.1} = 3.474 \times 10^3 \text{ Н·м}$$

$$\frac{M_{c.Rd.1}}{M_{c.Rd}} = 1.087$$

## Итерация 2

В итерационном расчете эффективные размеры должны быть посчитаны с учетом редуцированного сжимающего напряжения

$$\sigma_{\text{com.Ed}} := \chi_{d,1} \cdot f_{yb} \cdot \gamma_{mo}^{-1} \quad \sigma_{\text{com.Ed}} = 201.076 \text{ МПа}$$

$$\lambda_{p,\text{red.p}}(\lambda_p) := \lambda_p \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{\text{com.Ed}}}{\frac{f_{yb}}{\gamma_{mo}}}} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{p,\text{red}}(\lambda_p) := \lambda_p \cdot \sqrt{\chi_{d,1}}$$

### Ширина полки b

$$\lambda_{pb,1} := \lambda_{p,\text{red}}(\lambda_{pb}) \quad \lambda_{pb,1} = 0.661 \quad \rho := \rho_w(\lambda_{pb,1}, 1) \quad \rho = 1$$
$$b_{\text{ef}2} := 0.5 \cdot \rho \cdot b_p + g_r \quad b_{\text{ef}2} = 24.42 \text{ мм}$$

### Ширина отгиба c

$$\lambda_{pc,1} := \lambda_{p,\text{red}}(\lambda_{pc}) \quad \lambda_{pc,1} = 0.538 \quad \rho := \rho_o(\lambda_{pb,1}) \quad \rho = 1$$
$$c_{\text{ef}} := \rho \cdot c_p + g_r \quad c_{\text{ef}} = 14.42 \text{ мм}$$

### Эффективная площадь отгиба

Характеристики поперечного сечения отгиба(скругленные углы):

$$A_s := [(b_{\text{ef}2} - g_r) + (c_{\text{ef}} - g_r) + u] \cdot t \quad A_s = 48.479 \text{ мм}^2$$

$$y_s := \frac{t \cdot (c_{\text{ef}} - g_r) \cdot \left( g_r + \frac{c_{\text{ef}} - g_r}{2} \right) + t \cdot u \cdot w}{A_s} \quad y_s = 2.601 \text{ мм}$$

$$z_s := \frac{t \cdot (b_{\text{ef}2} - g_r) \cdot \left( g_r + \frac{b_{\text{ef}2} - g_r}{2} \right) + t \cdot u \cdot w}{A_s} \quad z_s = 7.248 \text{ мм}$$

$$I_s := \frac{1}{12} \cdot (b_{\text{ef}2} - g_r) \cdot t^3 + (b_{\text{ef}2} - g_r) \cdot t \cdot y_s^2 + \frac{1}{12} \cdot t \cdot (c_{\text{ef}} - g_r)^3 + (c_{\text{ef}} - g_r) \cdot t \cdot \left( g_r + \frac{c_{\text{ef}} - g_r}{2} - y_s \right)^2 + u \cdot t \cdot (y_s - w)^2 + \frac{r_m^3 \cdot t}{12}$$
$$I_s = 843.261 \text{ мм}^4$$

Определение жесткости отгиба, считая что он работает как балка на упругом основании. Если другая полка растянута, то  $k_f=0$ :

$$K := \frac{E \cdot t^3}{4 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{1}{(b_c - z_s)^2 \cdot h_c + (b_c - z_s)^3 + 0.5 \cdot [(b_c - z_s)^2 \cdot h_c] \cdot 0} \quad K = 0.273 \text{ Н} \cdot \text{мм}^{-2}$$

Критическое напряжение отгиба:

$$\sigma_{\text{cr,s}} := \frac{2 \cdot \sqrt{K \cdot E \cdot I_s}}{A_s} \quad \sigma_{\text{cr,s}} = 287.031 \text{ МПа}$$

Определение редуцирующего коэффициента для учета изменений формы при местной

потере устойчивости отгиба:

$$\lambda_d := \sqrt{\frac{f_{yb}}{\sigma_{cr.s}}} \quad \lambda_d = 0.943 \quad \chi_{d.2} := \chi_{cd}(\lambda_d)$$

$$\chi_{d.2} = 0.789 = \chi_{d.1} = 0.789 \quad \text{Условие выполнено}$$

Итерационный расчет должен быть закончен, когда  $\chi(n) = \mu \cdot \chi(n-1)$ , но  $\chi(n) \leq \chi(n-1)$

$$\sigma_{com.Ed.1} := \chi_{d.1} \cdot f_{yb} \cdot \gamma_{mo}^{-1} \quad \sigma_{com.Ed.1} = 201.076 \text{ МПа} \quad \sigma_{com.Ed} = 201.076 \text{ МПа}$$

Редуцированная площадь отгиба:

$$A_{s.red} := \chi_{d.2} \cdot A_s \cdot \frac{f_{yb} \cdot \gamma_{mo}^{-1}}{\sigma_{com.Ed}} \quad A_{s.red} = 48.479 \text{ мм}^2$$

$$t_{s.red} := \frac{A_{s.red}}{(b_{ef2} - g_r) + (c_{ef} - g_r) + u} \quad t_{s.red} = 1.16 \text{ мм}$$

Редуцированная площадь поперечного сечения профиля

$$A_{eff.b} := t \cdot [c_p + b_p + (h_{ef2} - g_r) + (h_{ef1} - g_r) + 3 \cdot u] + t_{s.red} \cdot [u + (b_{ef2} - g_r) + (c_{ef} - g_r)]$$

$$A_{eff.b} = 298.973 \text{ мм}^2$$

Центр тяжести эффективного поперечного сечения сжатой полки

$$z_1 := \frac{1}{A_{eff.b}} \cdot \left[ c_p \cdot t \cdot \left( h_c - \frac{c_c}{2} \right) + b_p \cdot t \cdot h_c + 2 \cdot u \cdot t \cdot (h_c - w) + (h_{ef2} - g_r) \cdot t \cdot \left( h_c - \frac{h_{ef2}}{2} \right) \dots \right]$$

$$\left[ + (h_{ef1} - g_r) \cdot t \cdot \frac{h_{ef1}}{2} + (c_{ef} - g_r) \cdot t_{s.red} \cdot \frac{c_{ef}}{2} + u \cdot t \cdot w + u \cdot t_{s.red} \cdot w \right]$$

$$z_1 = 82.355 \text{ мм}$$

$$z_2 := h_c - z_1$$

$$z_2 = 66.482 \text{ мм}$$

$$\begin{aligned}
I_{\text{eff.y}} := & \frac{c_p^3 \cdot t}{12} + c_p \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - c_c + \frac{c_p}{2} \right)^2 + \frac{b_p \cdot t^3}{12} + b_p \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 + 2 \cdot u \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - w \right)^2 \dots \\
& + \frac{(h_{\text{ef2}} - g_r)^3 \cdot t}{12} + (h_{\text{ef2}} - g_r) \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - \frac{h_{\text{ef2}}}{2} \right)^2 \dots \\
& + \frac{(h_{\text{ef1}} - g_r)^3 \cdot t}{12} + (h_{\text{ef1}} - g_r) \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - \frac{h_{\text{ef1}}}{2} \right)^2 + u \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - w \right)^2 \dots \\
& + \frac{(b_{\text{ef1}} - g_r) \cdot t^3}{12} + (b_{\text{ef1}} - g_r) \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 \dots \\
& + \frac{(b_{\text{ef2}} - g_r) \cdot t_{\text{s.red}}^3}{12} + (b_{\text{ef2}} - g_r) \cdot t_{\text{s.red}} \cdot \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 \dots \\
& + \frac{(c_{\text{ef}} - g_r)^3 \cdot t_{\text{s.red}}}{12} + (c_{\text{ef}} - g_r) \cdot t_{\text{s.red}} \cdot \left( \frac{h_c}{2} - c_c + \frac{c_{\text{ef}} - g_r}{2} \right)^2
\end{aligned}$$

$$I_{\text{eff.y}} = 1.124 \times 10^6 \text{ мм}^4$$

$$W_{\text{eff.y}} := \frac{I_{\text{eff.y}}}{z_1}$$

$$W_{\text{eff.y}} = 1.365 \times 10^4 \text{ мм}^3$$

Максимально допустимый изгибающий момент:

$$M_{\text{c.Rd.2}} := \frac{f_{\text{yb}} \cdot W_{\text{eff.y}}}{1000 \cdot \gamma_{\text{mo}}}$$

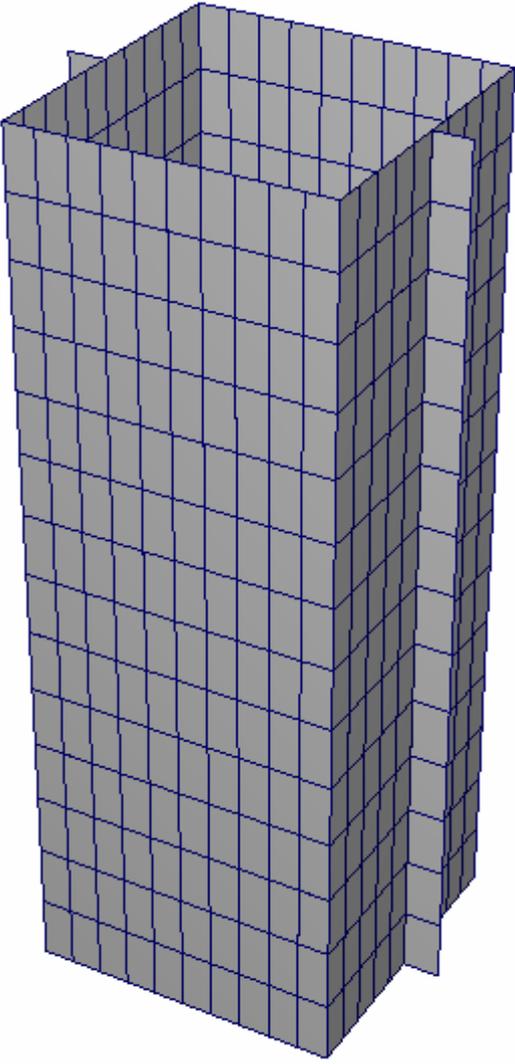
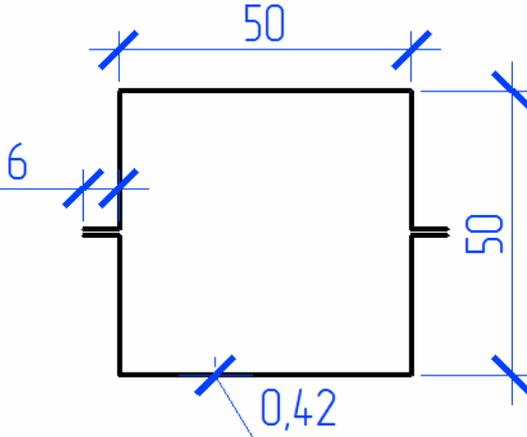
$$M_{\text{c.Rd.2}} = 3.48 \times 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

$$\frac{M_{\text{c.Rd.2}}}{M_{\text{c.Rd.1}}} = 1.002$$

### 3. Конечноэлементное моделирование тонкостенных стоек

#### 3.1. Исследование касательных напряжений в составных профилях коробчатого сечения

Целью данной работы было определить значения касательных напряжений в стойках различной длины, имеющих составное коробчатое сечение, найти закономерность их распределения, а также влияние их на несущую способность. Для того чтобы понять насколько верна расчетная схема, были сравнены перемещения стоек по вертикали с экспериментальными данными, взятыми из доклада Демао Янга [9]. Размеры поперечного сечения указаны на рис. 3.1.

	
<p>Рис. 3.1. Общий вид профиля</p>	<p>Рис. 3.2. Поперечное сечение профиля</p>

Прежде всего, сравнивались вертикальные перемещения, полученные МКЭ, с экспериментальными данными. Также рассматривалась форма потери устойчивости (рис. 3.4). Пример распределения перемещений точек профиля по вертикали приведен на рис. 3.3.

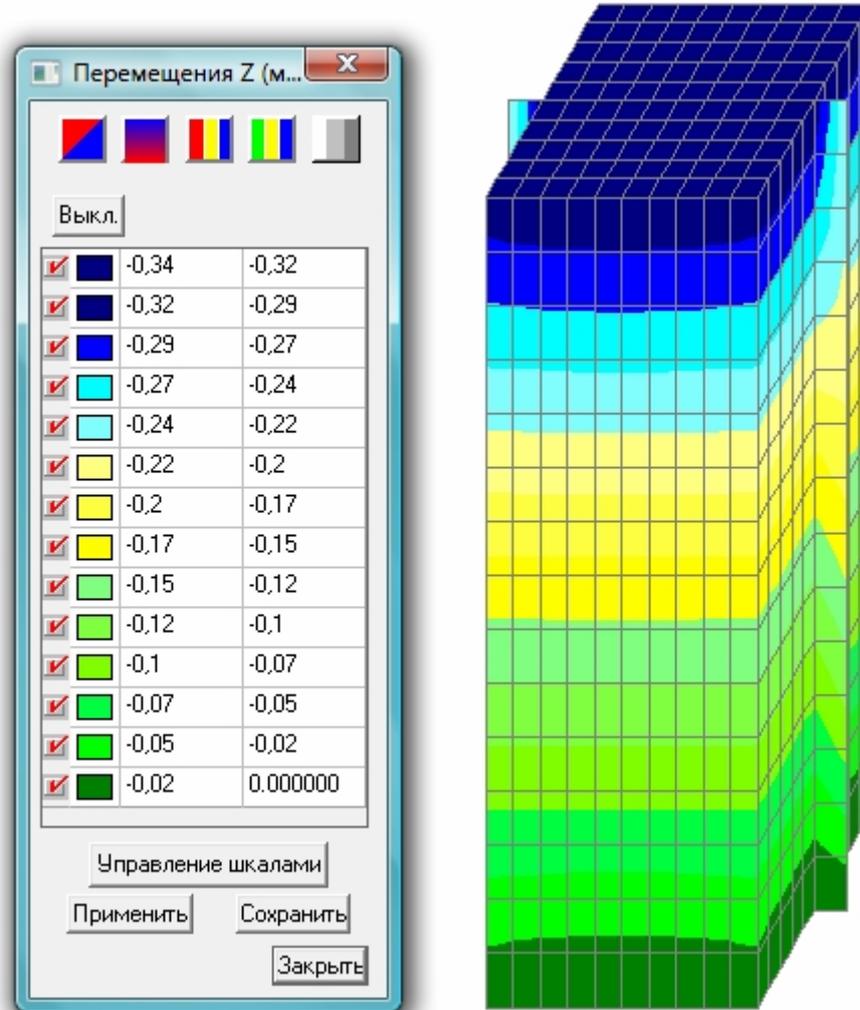


Рис. 3.3. Перемещения по вертикали

На основе полученных результатов была построена таблица со сравнением значений (см. табл. 3.1).

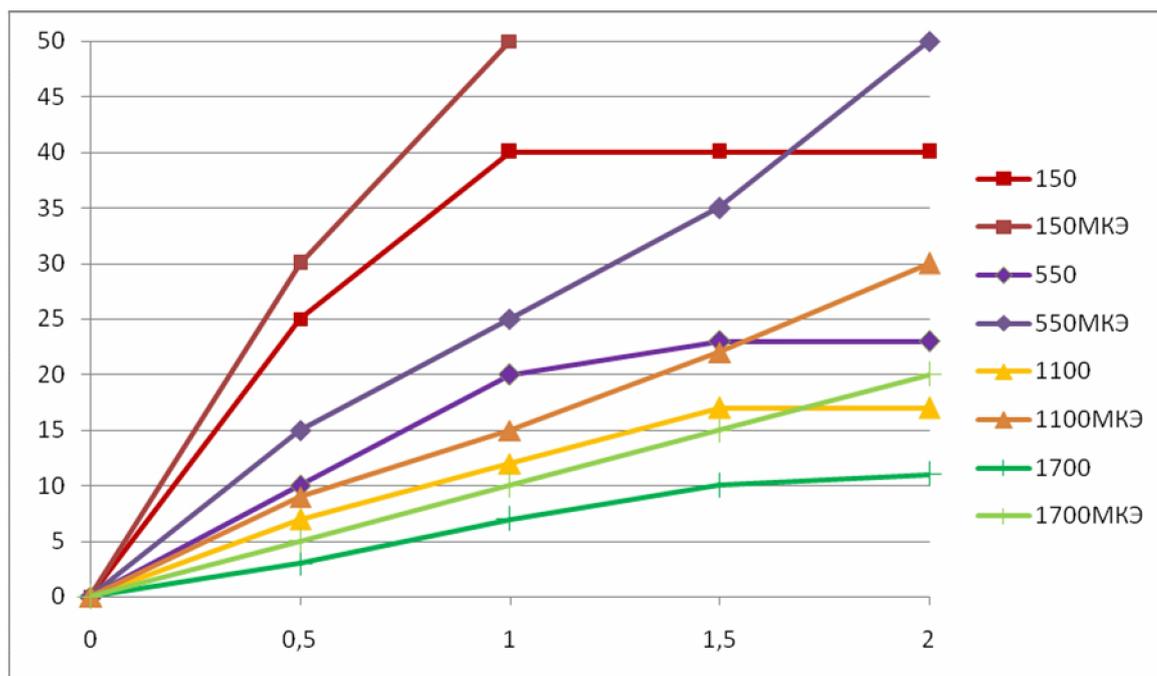


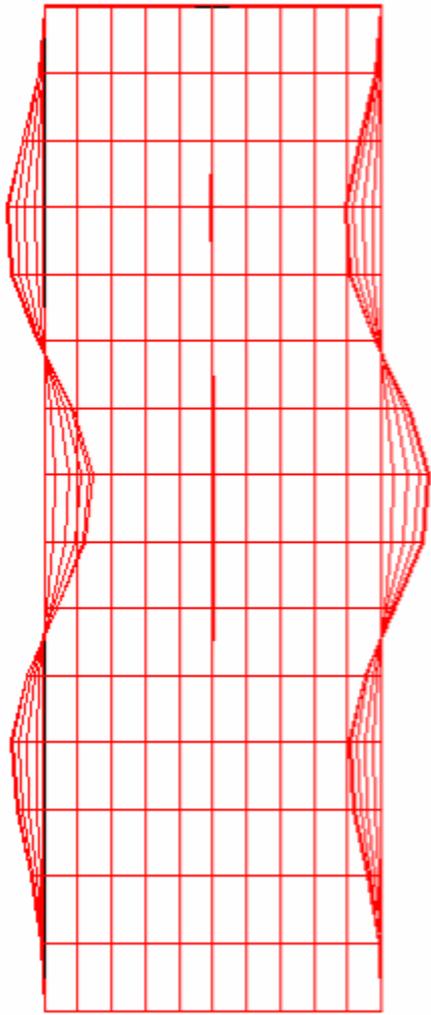
Таблица 3.1. Зависимость вертикальных перемещений (мм) от нагрузки (кН)

Длина стойки, мм	Средняя относительная погрешность
150	26%
550	26%
1100	21%
1700	34%

Таблица 3.2. Средняя относительная погрешность по профилям разной длины

Сравнение перемещений показало, что данные эксперимента и результаты расчета МКЭ хорошо согласуются, имеют один и тот же характер распределения, однако имеют различия, значения которых указаны в таблице 3.2. Эти различия могут быть вызваны тем, что программа, в которой велся расчет, не учитывает физическую нелинейность, а также показывает работу «идеального» профиля, когда как на результаты эксперимента могут влиять многие факторы, такие как начальные неточности в геометрии стойки, особенности работы установки, точность приложения нагрузки и т.д. Поэтому можно говорить, что МКЭ может быть использован для рассмотрения напряженно-деформируемого состояния профилей, и он дает правдоподобные результаты. Также были сравнены формы потери устойчивости (рис. 3.3, 3.4). Форма потери устойчивости, полученная МКЭ, совпала

с результатами тестов.

	
<p>Рис. 3.3. Форма потери устойчивости при эксперименте</p>	<p>Рис. 3.4. Форма потери устойчивости МКЭ</p>

Далее в работе было рассмотрено распределение касательных напряжений в стойках в зависимости от длины. Как видно из рис 3.5, среднее значение касательных напряжений остается постоянным не зависимо от высоты стойки, и их значения являются незначительными. Значения нормальных напряжений больше касательных в среднем в 15 раз. Наличие перфорации в стенке увеличивает значение касательных напряжений в среднем на 10,5% (см. рис. 3.7, 3.8).

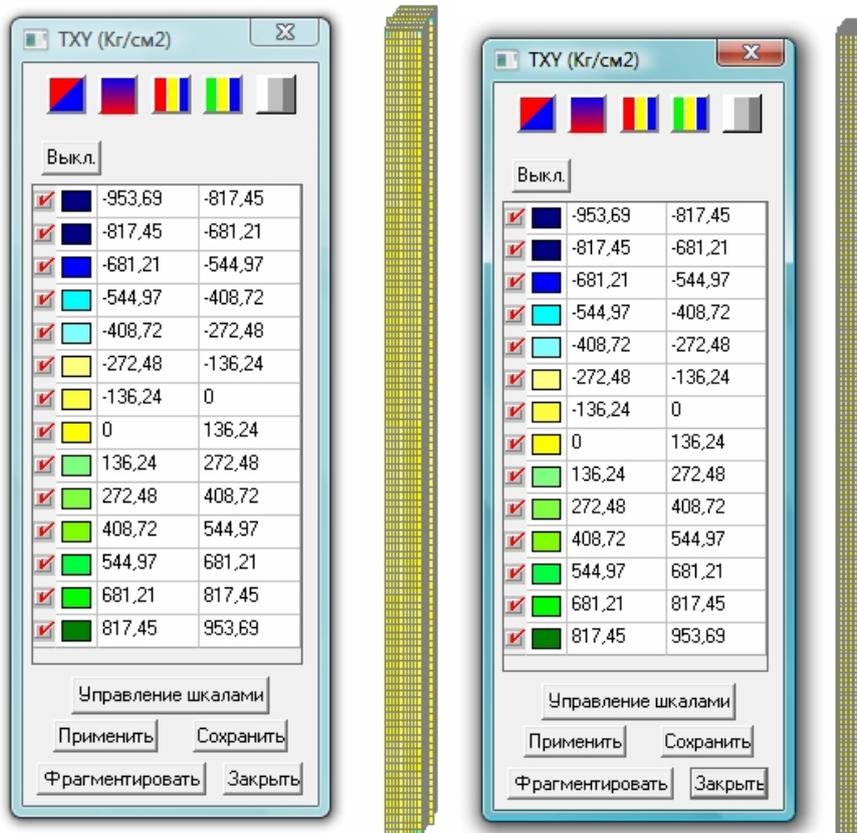
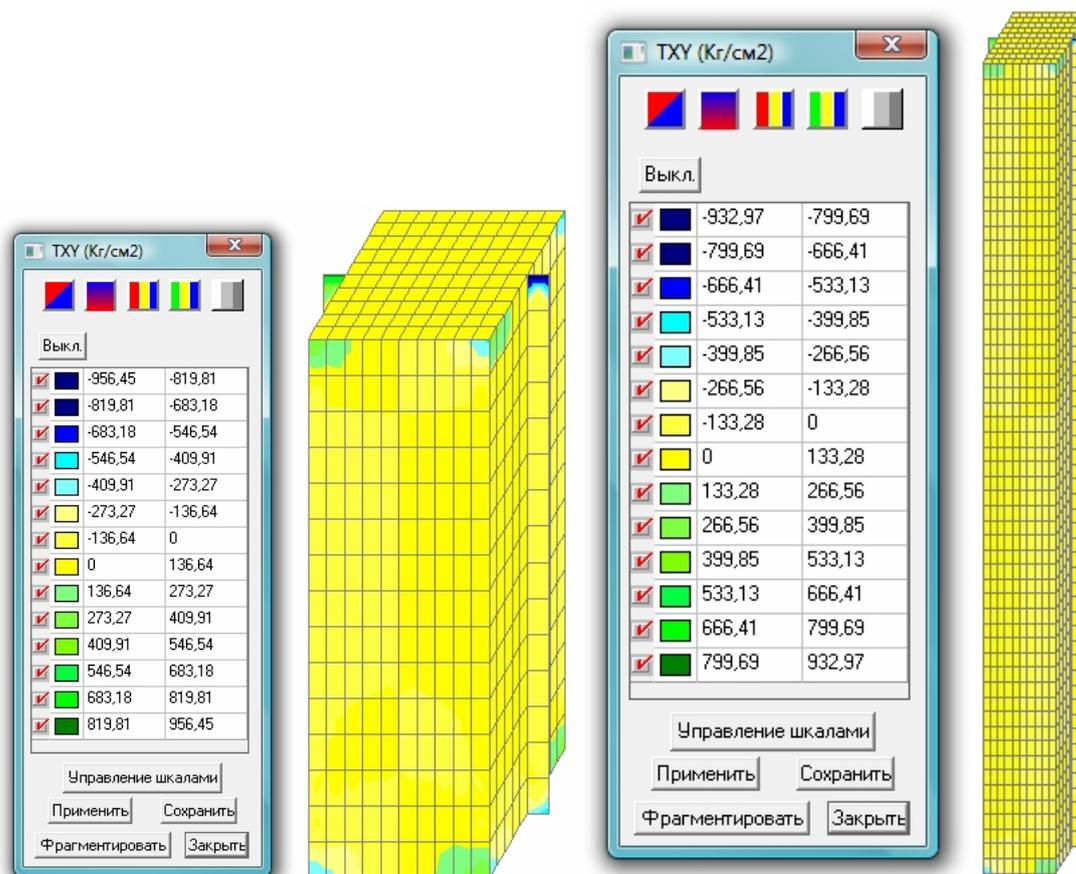


Рис. 3.5. Распределение касательных напряжений в профилях разной длины

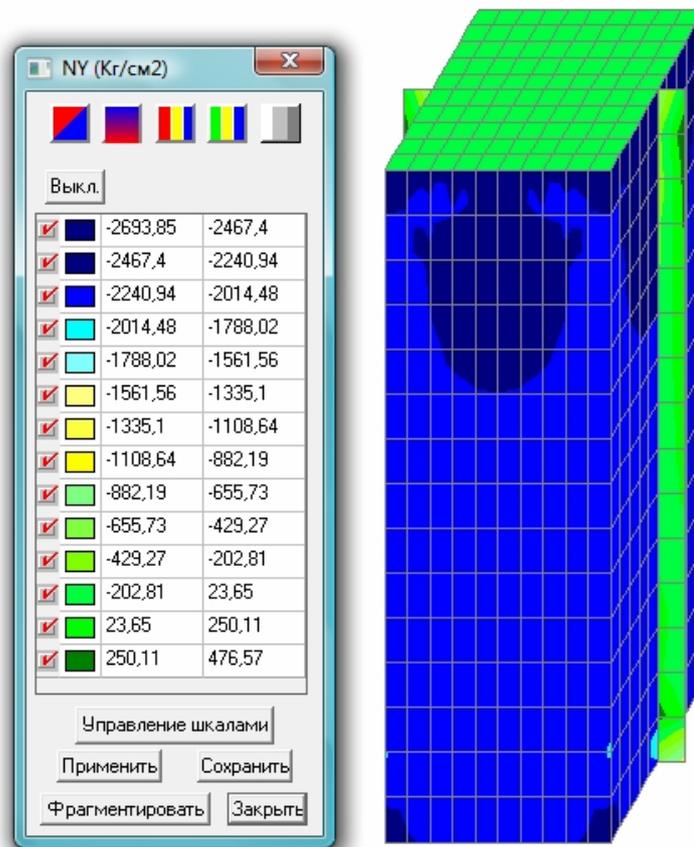


Рис. 3.6. Распределение нормальных напряжений

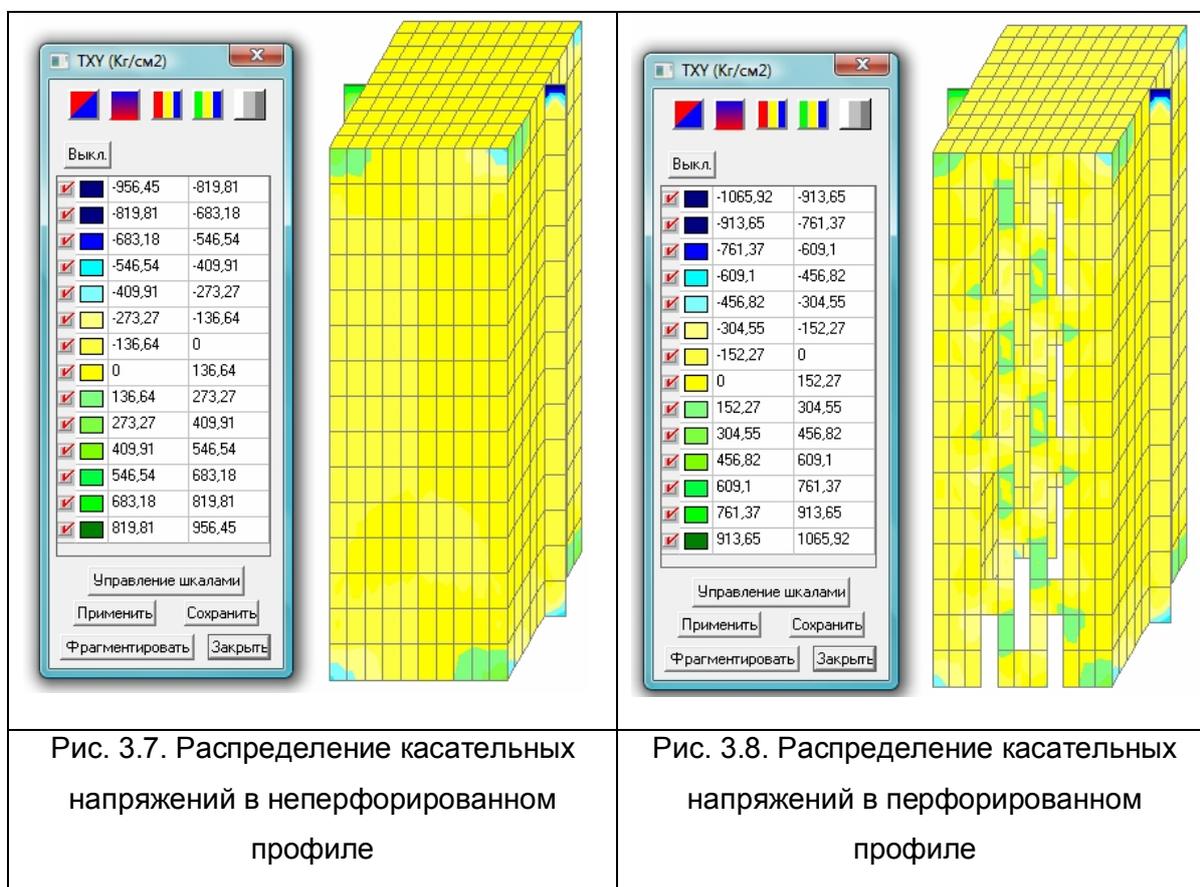


Рис. 3.7. Распределение касательных напряжений в неперфорированном профиле

Рис. 3.8. Распределение касательных напряжений в перфорированном профиле

### **3.2. Исследование нормальных напряжений в профилях открытого сечения**

В работе рассматривалась разница между распределением нормальных напряжений при изгибе в цельном профиле и перфорированном. Для этого моделировалась поперечная рама, состоящая из двух стоек и ригеля с толщиной профилей, равной 0,8, 1,0; 1,2; 1,5 и 2,0 мм. Для того, чтобы стойки работали на изгиб, к верхнему поясу ригеля прикладывалась равномерно распределенная нагрузка на погонный метр. Так как мы рассматриваем оболочечную модель, то для приложения нагрузки создавалась фиктивная балка, имеющая размеры поперечного сечения, равные толщине профиля. Крепление ригеля к стойкам осуществлялось сведением совпадающих узлов, т.е получался жесткий узел, благодаря которому изгибающий момент передавался стойкам.

Поперечное сечение профилей принято в соответствии с сортаментом компании Балтпрофиль, т.к. они имеют цельные и перфорированные стоечные профили. В работе рассматривались стойки с высотой стенки, равной 150 и 200мм, потому что данный вид профилей является одним из наиболее используемых при проектировании сооружений из ЛСТК. Схема расположения перфорации представлена на рис. 3.9, 3.10.

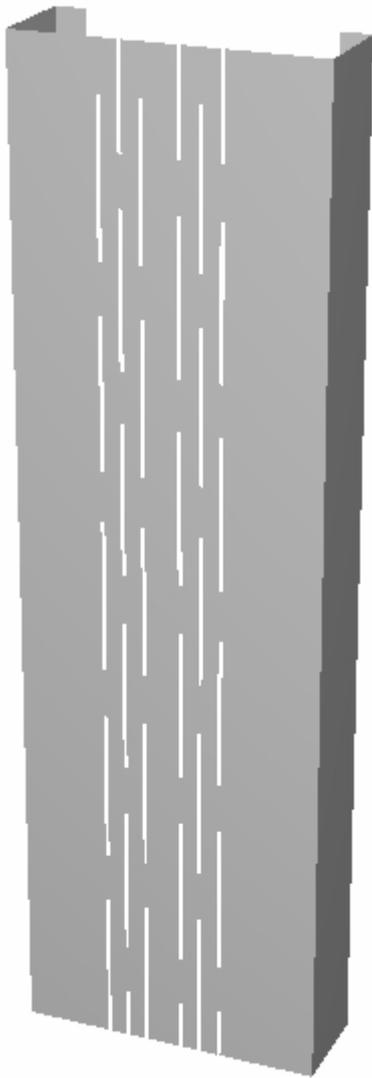


Рис. 3.9 Общий вид перфорированной стойки

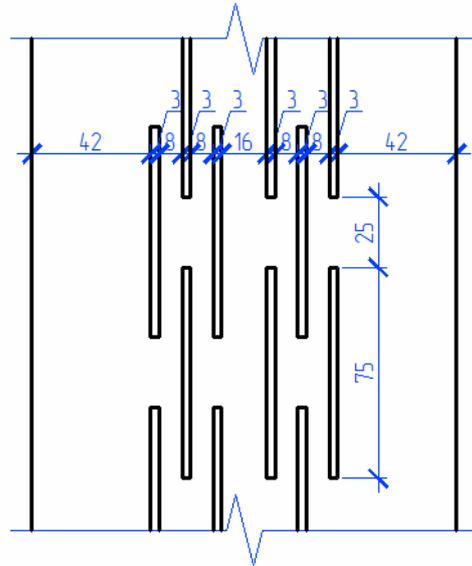


Рис. 3.10 Размеры перфорации

Далее представлены две поперечные рамы, состоящие из профилей толщиной 1,2 мм. Первая рама состоит из цельных профилей, сечение ПС150-1,2; вторая рама состоит из термопрофилей тех же размеров, сечение ТС150-1,2. К двум схемам прикладывалась одинаковая нагрузка, равная 1,866 т/м, и рассматривалось распределение напряжений в стойках. Изополя напряжений представлены на рисунках 3.11, 3.12.

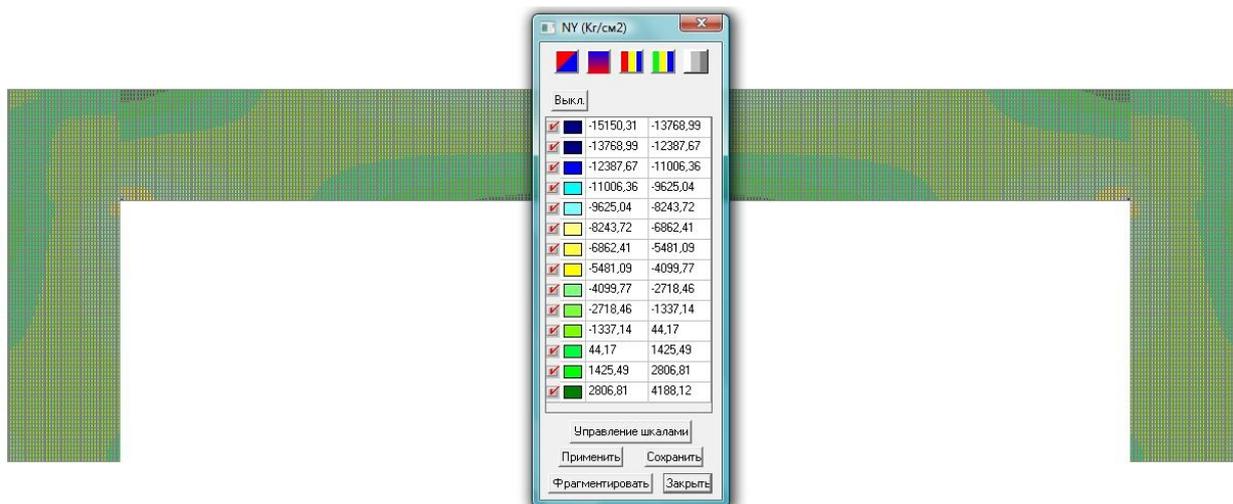


Рис. 3.11 Нормальные напряжения в неперфорированной раме

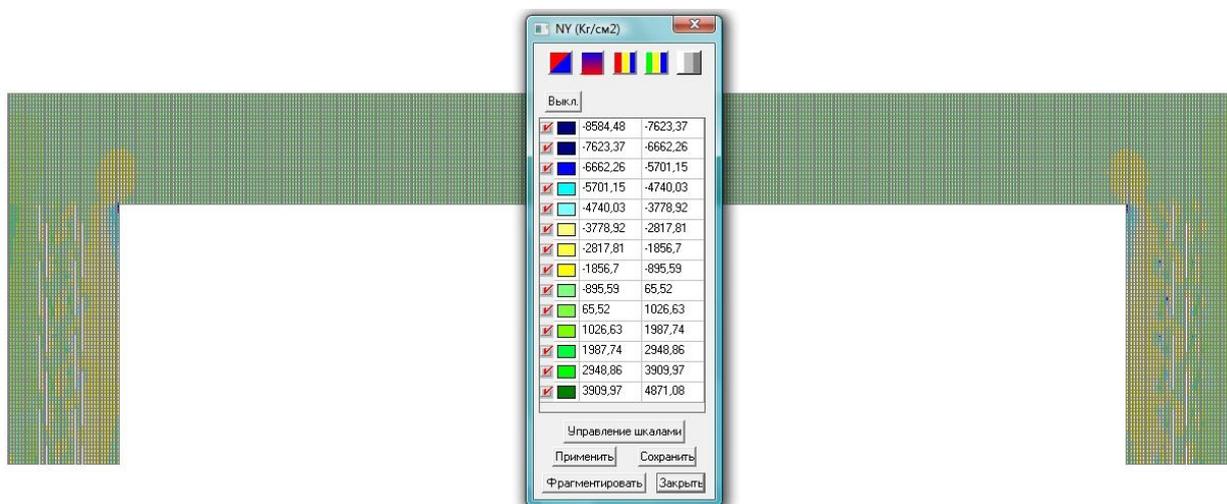


Рис. 3.12 Нормальные напряжения в перфорированной раме

Остановимся на распределении напряжений в стойках. Их характер в первом и втором случае одинаков, однако значения различаются (рис. 3.13, 3.14). В левой части профиля наблюдается растяжение, в правой – сжатие. Максимальное сжимающее напряжение наблюдается у края стыка стойки с низом стенки ригеля.

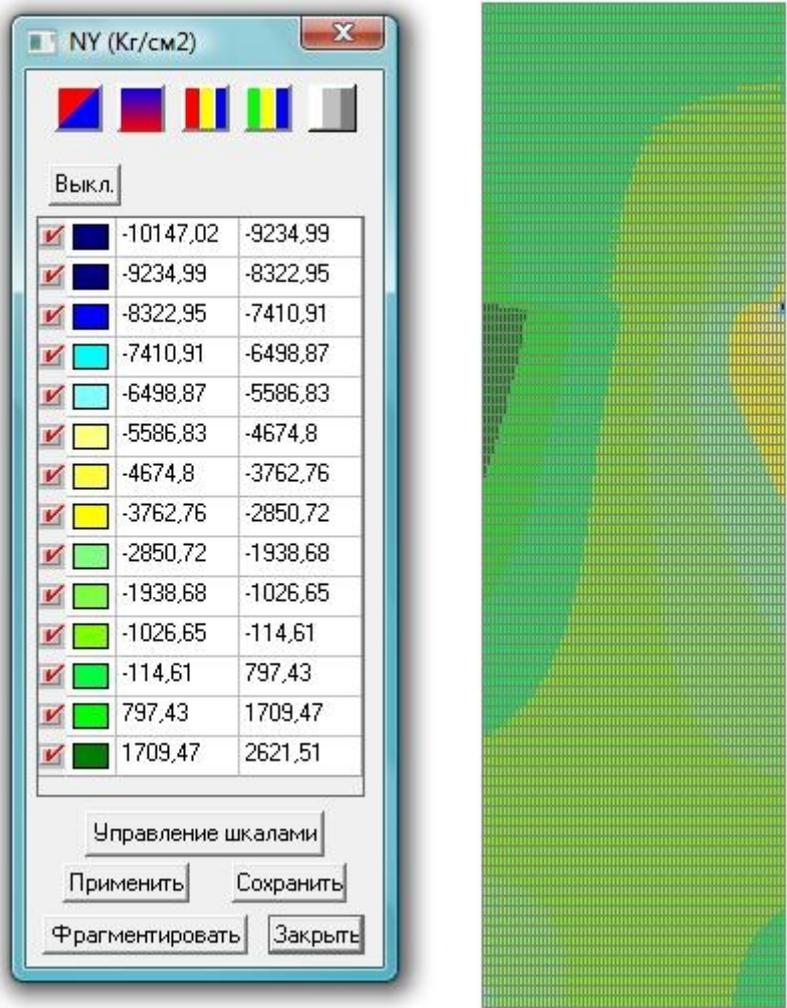


Рис. 3.13 Нормальные напряжения в неперфорированной стойке

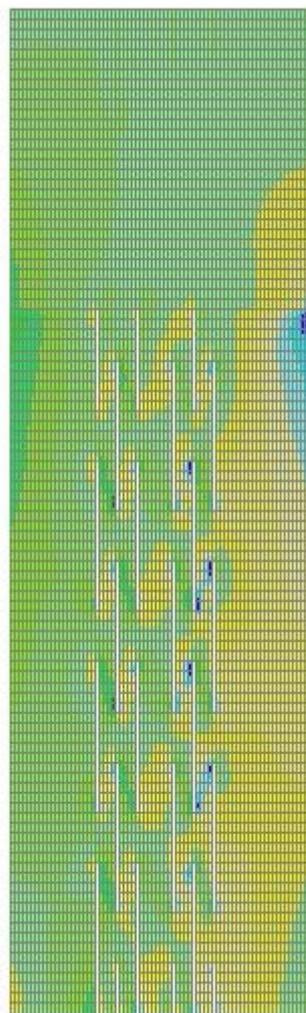


Рис. 3.14 Нормальные напряжения в перфорированной стойке

Для более правильной оценки напряжений рассмотрим распределение напряжений в нескольких поперечных сечениях профилей. Первые два рисунка 3.15 и 3.16 представляют сечения в месте максимального сжимающего напряжения, следующие два 3.17 и 3.18 посередине высоты профиля.

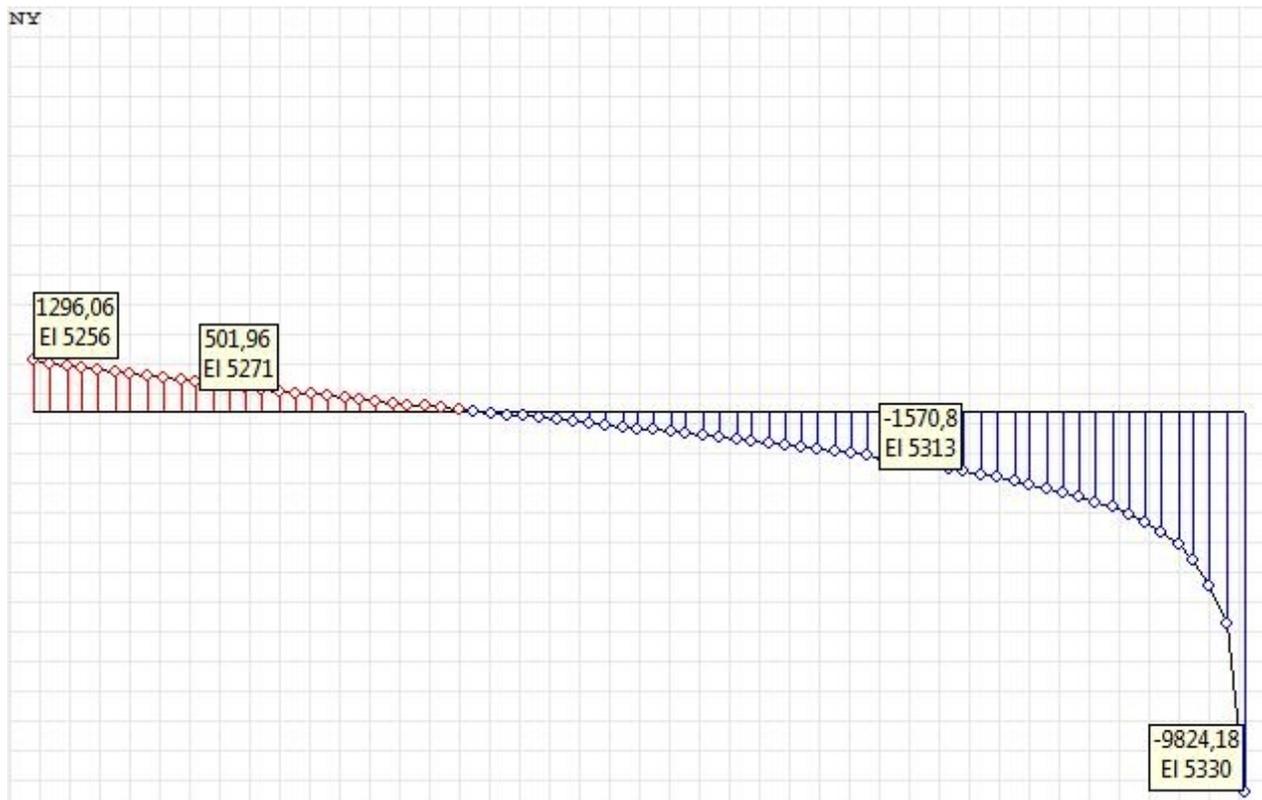


Рис. 3.15 Нормальные напряжения в неперфорированном профиле

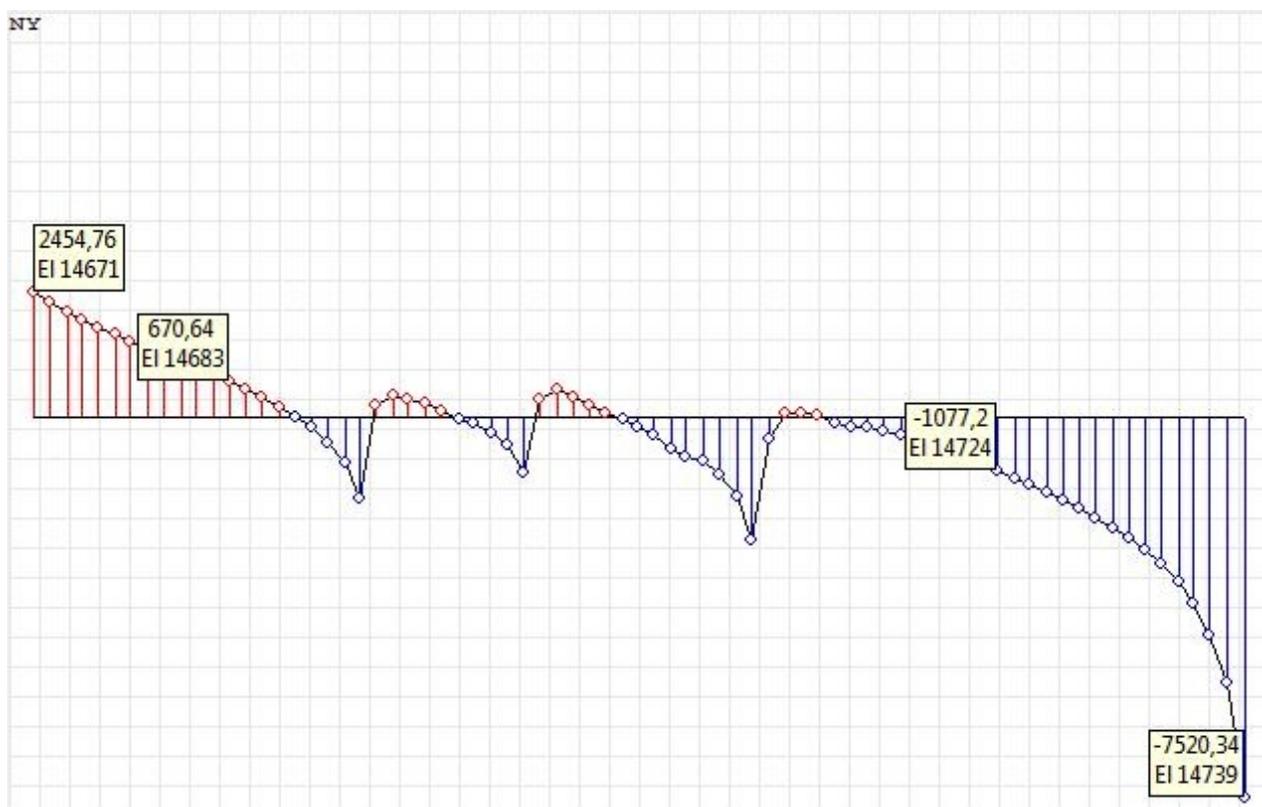


Рис. 3.16 Нормальные напряжения в перфорированном профиле

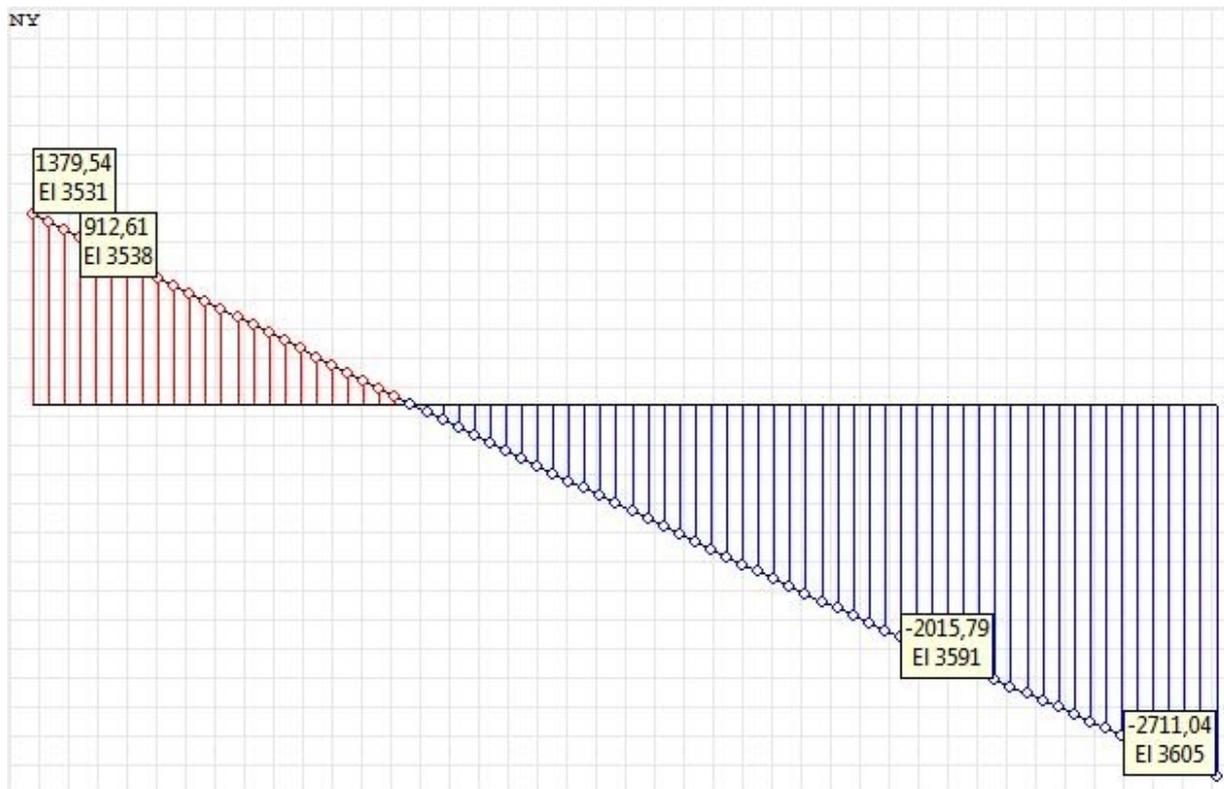


Рис. 3.17 Нормальные напряжения в неперфорированном профиле посередине высоты стойки

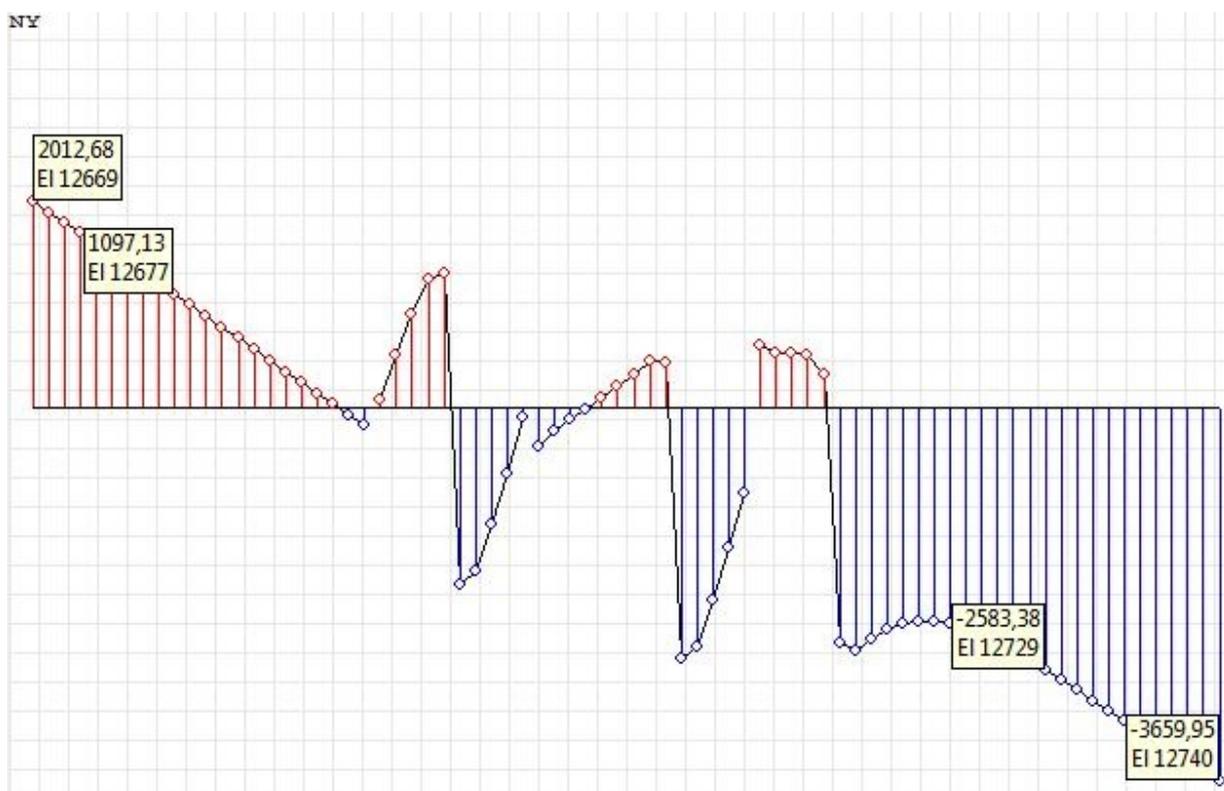


Рис. 3.18 Нормальные напряжения в перфорированном профиле посередине высоты стойки

В отличие от «классического» распределения напряжений при изгибе в цельном профиле, в перфорированном наблюдаются скачки напряжений от сжатия к растяжению в местах перфорации. При этом напряжения по бокам от центра имеют большие значения, чем в цельной стойке. Рассмотрим напряжения в полках стойки посередине высоты (рис. 3.19, 3.20).

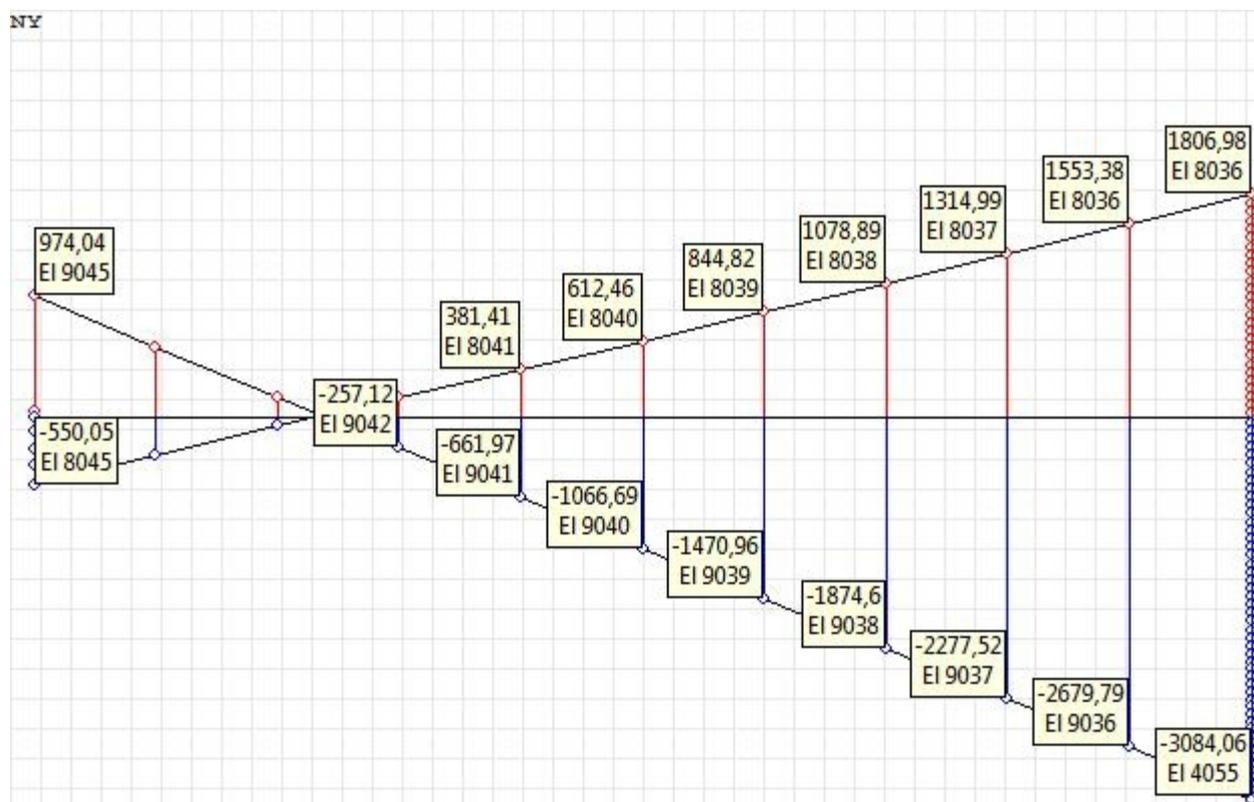


Рис. 3.19 Распределение напряжений в полках неперфорированного профиля

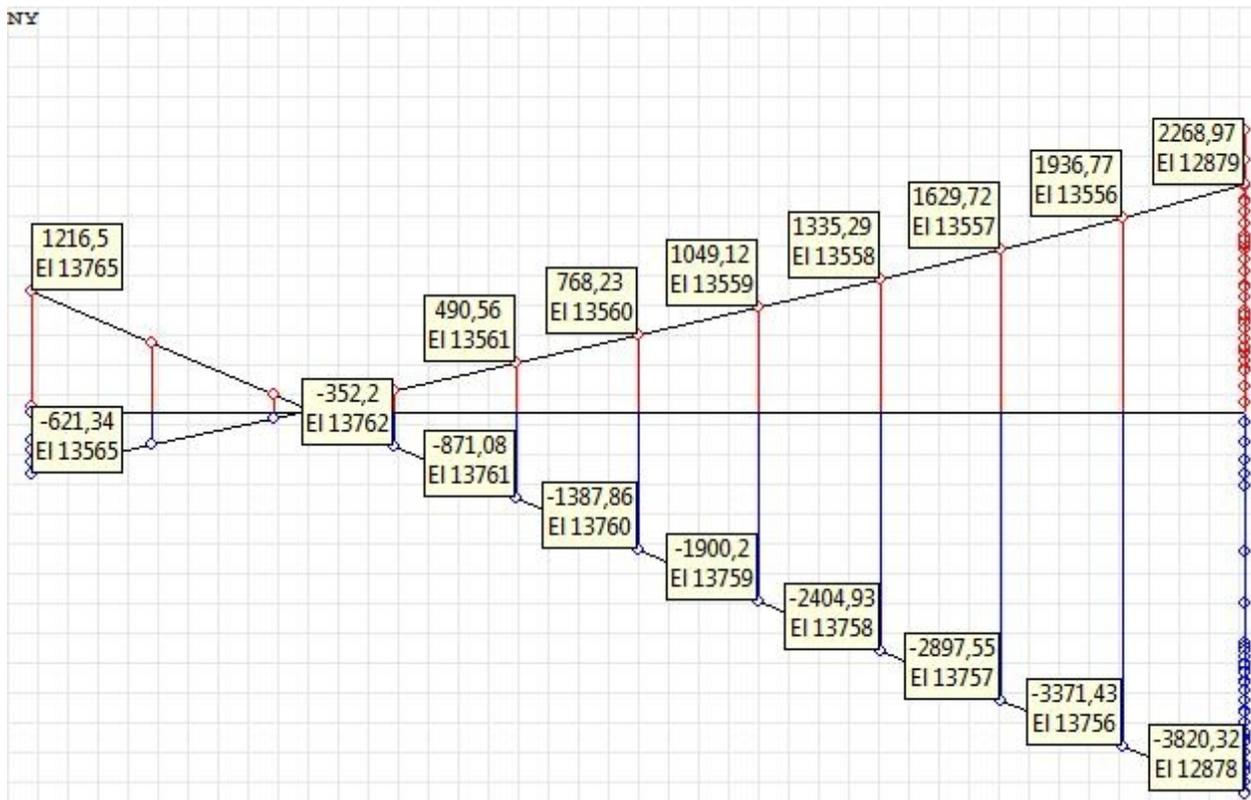


Рис. 3.20 Распределение напряжений в полках перфорированного профиля

По рисункам можно сделать вывод, что перфорация в стенке профиля влияет на распределение напряжений по всему его поперечному сечению.

На основе полученных результатов был вычислен коэффициент, показывающий разницу в распределении напряжений. Он находился по следующей формуле:

$$k_{\text{red}} = \frac{A_{\text{plain}}}{A_{\text{perf}}}$$

где:

$A_{\text{plain}}$  - площадь эпюры напряжений в неперфорированной пластине;

$A_{\text{perf}}$  - площадь эпюры напряжений в перфорированной пластине;

Вычисленные средние коэффициенты по различным профилям представлены в таблице 3.3. Из-за увеличения напряжений в стенки профиля в полке и отгибе напряжения также возросли.

Таблица 3.3. Коэффициенты перфорации

Сечение профиля	$K_{red}$ стенка	$K_{red}$ полка	$K_{red}$ отгиб	$K_{red}$
150-0,8	0,73	0,78	0,81	0,76
150-1,0	0,73	0,78	0,81	0,76
150-1,2	0,71	0,77	0,80	0,74
150-1,5	0,73	0,79	0,82	0,76
150-2,0	0,72	0,77	0,81	0,74
200-0,8	0,73	0,77	0,81	0,73
200-1,0	0,74	0,76	0,82	0,74
200-1,2	0,75	0,78	0,80	0,76
200-1,5	0,72	0,8	0,81	0,75
200-2,0	0,74	0,78	0,80	0,74

Небольшой разброс значений между напряжениями для различных профилей говорит о корректности и достаточности полученных результатов.

Из полученной таблицы можно сделать следующие выводы:

Средний коэффициент перфорации для стенки – 0,73;

Средний коэффициент перфорации для полки – 0,77;

Средний коэффициент перфорации для отгиба – 0,81;

Средний коэффициент перфорации для всего профиля – 0,75;

В среднем нормальные напряжения в перфорированном профиле по сравнению с цельным выше на 25%.

#### 4. Научно обоснованные разработки

Полученные коэффициенты перфорации из главы 3.2 рекомендуется использовать при вычислении эффективной ширины элементов поперечного сечения профиля, умножая эффективную ширину на данные коэффициенты.

Для вычисления эффективной ширины стенки коэффициент 0,73:

$$h_{\text{eff}} := 0.73 \rho \cdot \frac{h_p}{1 - \psi}$$

Для вычисления эффективной ширины полки коэффициент 0,77:

$$b_{\text{efl}} := 0.77 \cdot 0.5 \cdot \rho \cdot b_p + g_r$$

Для вычисления эффективной ширины отгиба коэффициент 0,81:

$$c_{\text{ef}} := 0.81 \rho \cdot c_p + g_r$$

С использованием полученных коэффициентов были найдены редуцированные характеристики термопрофилей (табл. 4.1).

Таблица 4.1. Коэффициенты перфорации

Сечение профиля	Weff	Weff perf	Weff perf/ Weff
150-0,8	7,3	6,2	0,85
150-1,0	10,3	8,6	0,83
150-1,2	13,7	11,2	0,82
150-1,5	17,8	14,7	0,83
150-2,0	24,1	20,0	0,83
200-0,8	10,2	8,7	0,85
200-1,0	14,4	12,1	0,84
200-1,2	18,8	15,6	0,83
200-1,5	25,4	20,9	0,82
200-2,0	35,9	29,6	0,82

По результатам сравнения редуцированных характеристик цельных и

перфорированных профилей можно сказать, что наличие перфорации снижает несущую способность профиля при изгибе в среднем на 17%.

Далее представлен пример вычисления критического изгибающего момента перфорированной стойки для профиля сечением ПС150-1,2.

## Изгиб перфорированного С-профиля

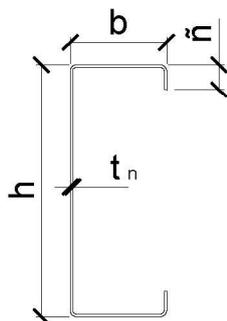
### 1. Свойства материала

Модуль упругости	$E := 210000 \text{ МПа}$
Коэффициент Пуассона	$\nu := 0.3$
Модуль сдвига	$G := 80769 \text{ МПа}$
Предел текучести	$f_{yb} := 255 \text{ МПа}$
Коэффициент условия работы	$\gamma_{mo} := 1.0$
Упругое напряжение	$\varepsilon = 0.96$

$$\varepsilon := \sqrt{\frac{235}{f_{yb}}}$$

### 2. Размеры поперечного сечения

Высота стенки	$h := 150 \text{ мм}$
Ширина полки	$b := 50 \text{ мм}$
Ширина отгиба	$c := 15 \text{ мм}$
Номинальная толщина	$t_n := 1.2 \text{ мм}$
Расчетная толщина	$t := t_n - 0.04 \quad t = 1.16 \text{ мм}$
Радиус скругления (внутренний/внешний)	$r_i := 2 \cdot t_n \quad r_u := r_i + t_n$



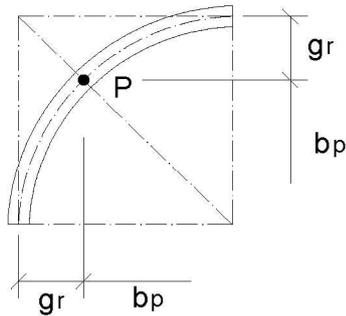
### 3. Геометрические характеристики

Средний радиус скругления:  $r_m := r_i + 0.5 \cdot t_n \quad r_m = 3 \text{ мм}$

	Внешние размеры	Размеры по центральной линии	Внутренние размеры
Стенка	$h = 150$	$h_c := h - t$	$h_i := h - t - 2 \cdot r_m$
Полка	$b = 50$	$b_c := b - t$	$b_i := b - t - 2 \cdot r_m$
Отгиб	$c = 15$	$c_c := c - \frac{t}{2}$	$c_i := b - 0.5t - r_m$

Влияние углов сгиба:

длина скругления	$u := 1.57 \cdot r_m$	$u = 4.71$
центр тяжести	$w := 0.363 \cdot r_m$	$w = 1.089$
	$v := 0.637 \cdot r_m$	$v = 1.911$
угол сгиба	$\varphi := 0.5 \cdot \pi$	



$$g_r := r_m \cdot (\tan(0.5 \cdot \varphi) - \sin(0.5 \cdot \varphi)) \quad g_r = 0.879 \text{ мм}$$

Размеры относительно точки P

$$h_p := h_c - 2 \cdot g_r \quad h_p = 147.083$$

$$b_p := b_c - 2 \cdot g_r \quad b_p = 47.083$$

$$c_p := c_c - g_r \quad c_p = 13.541$$

Углы :=  $\begin{cases} \text{"Острые углы"} & \text{if } r_i < 5 \cdot t_n \wedge r_i < 0.1 \cdot \min(h_p, b_p, c_p) \\ \text{"Скругленные углы"} & \text{otherwise} \end{cases}$       Углы = "Скругленные углы"

$$\delta := 0.43 \cdot \frac{8 \cdot r_i}{2 \cdot h_c + 4 \cdot b_c + 4 \cdot c_c} \quad \delta := \begin{cases} 0 & \text{if } r_i < 5 \cdot t_n \wedge r_i < 0.1 \cdot \min(h_p, b_p, c_p) \\ \delta & \text{otherwise} \end{cases} \quad \delta = 0.015$$

**Максимальные отношения ширины к толщине**

$$\frac{h}{t_n} = 125 < 500$$

$$\frac{b}{t_n} = 41.667 < 60$$

$$\frac{c}{t_n} = 12.5 < 50$$

$$\frac{c}{b} = 0.3 \quad \text{от } 0.2 \text{ до } 0.6$$

Профиль :=  $\begin{cases} \text{"проходит по EN 1993-1-3"} & \text{if } \frac{h}{t} \leq 500 \wedge \frac{b}{t} \leq 90 \wedge \frac{c}{b} \leq 0.6 \wedge \frac{c}{b} \geq 0.2 \wedge \frac{c}{t_n} \leq 50 \\ \text{"не проходит по EN 1993-1-3"} & \text{otherwise} \end{cases}$

Профиль = "проходит по EN 1993-1-3"

#### 4. Окончательные характеристики поперечного сечения

Окончательные характеристики поперечного сечения должны быть посчитаны с учетом влияния скругления углов:

$$A_g := (h_p + 2 \cdot b_p + 2 \cdot c_p + 4 \cdot u) \cdot t \quad A_g = 333.118 \text{ мм}^2$$

$$I_{yg} := h_p^3 \cdot \frac{t}{12} + 2 \cdot \left[ \frac{b_p \cdot t^3}{12} + b_p \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 \right] + 2 \cdot \left[ \frac{c_p^3 \cdot t}{12} + c_p \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - c_c + \frac{c_p}{2} \right)^2 \right] + 4 \cdot u \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - w \right)^2$$

$$I_{yg} = 1.171 \times 10^6 \text{ мм}^4$$

$$W_{el} := I_{yg} \cdot \left( \frac{h_c}{2} \right)^{-1}$$

$$W_{el} = 1.573 \times 10^4 \text{ мм}^3$$

**Функции:**      Отношение гибкости

$$\lambda_p(w, k_\sigma) := \frac{w}{t} \cdot \frac{1}{28.4 \cdot \epsilon \cdot \sqrt{k_\sigma}}$$

$$\rho_w(\lambda_p, \psi) := \begin{cases} \min \left[ \frac{\lambda_p - 0.055 \cdot (3 + \psi)}{\lambda_p^2}, 1 \right] & \text{if } \lambda_p \geq 0.673 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\rho_o(\lambda_p) := \begin{cases} \min\left[1, \left(1 - \frac{0.188}{\lambda_p}\right) \cdot \frac{1}{\lambda_p}\right] & \text{if } \lambda_p \geq 0.748 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\chi_{cd}(\lambda_d) := \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda_d \leq 0.65 \\ 1.47 - 0.723 \cdot \lambda_d & \text{if } \lambda_d > 0.65 \wedge \lambda_d < 1.38 \\ \frac{0.66}{\lambda_d} & \text{if } \lambda_d \geq 1.38 \end{cases}$$

## 5. Вычисление редуцированного сечения

Сжимающее напряжение  $\sigma_{\text{com.Ed}} := f_{yb} \cdot \gamma_{mo}^{-1}$   $\sigma_{\text{com.Ed}} = 255$  МПа

### Шаг 1. Определение эффективных размеров

#### Ширина полки b

$$\psi := 1 \quad k_{\sigma} := 4 \quad \lambda_{pb} := \frac{b_p}{t} \cdot \frac{1}{28.4 \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{k_{\sigma}}} \quad \lambda_{pb} = 0.744$$

$$\rho := \min\left[1, \frac{\lambda_{pb} - 0.055 \cdot (3 + \psi)}{\lambda_{pb}^2}\right] \quad \rho = 0.946 \quad b_{\text{ef1}} := 0.77 \cdot 0.5 \cdot \rho \cdot b_p + g_T$$

$$b_{\text{ef2}} := b_{\text{ef1}} \quad b_{\text{ef1}} = 18.033 \text{ мм}$$

#### Ширина отгиба c

$$k_{\sigma c} := \begin{cases} 0.5 & \text{if } \frac{c_p}{b_p} \leq 0.35 \\ 0.5 + 0.83 \cdot \sqrt{\left(\frac{c_p}{b_p} - 0.35\right)^2} & \text{if } \frac{c_p}{b_p} \leq 0.6 \wedge \frac{c_p}{b_p} > 0.35 \end{cases} \quad k_{\sigma c} = 0.5$$

$$\lambda_{pc} := \frac{c_p}{t} \cdot \frac{1}{28.4 \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{k_{\sigma c}}} \quad \lambda_{pc} = 0.606 \quad \rho := \min\left[1, \left(1 - \frac{0.188}{\lambda_{pc}}\right) \cdot \frac{1}{\lambda_{pc}}\right] \quad \rho = 1$$

$$c_{\text{ef}} := 0.81 \rho \cdot c_p + g_T \quad c_{\text{ef}} = 11.847 \text{ мм}$$

#### Влияние соотношения $\sigma_2/\sigma_1$ :

Изменение центра тяжести по оси z (скругленные углы)

$$z_{\text{nr}} := \frac{(b_c - b_{\text{ef1}} - b_{\text{ef2}}) \cdot t \cdot \frac{h_c}{2} + (c_c - c_{\text{ef}}) \cdot t \cdot \left(\frac{h_c}{2} - \frac{c_{\text{ef}}}{2}\right)}{t \cdot [h_p + b_p + c_p + (b_{\text{ef1}} - g_T) + (b_{\text{ef2}} - g_T) + (c_{\text{ef}} - g_T) + 4 \cdot u]} \quad z_{\text{nr}} = -4.145 \text{ мм}$$

Изменение центра тяжести по оси z (острые углы)

$$z_{ns} := \frac{(b_c - b_{ef1} - b_{ef2}) \cdot t \cdot \frac{h_c}{2} + (c_c - c_{ef}) \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - \frac{c_{ef}}{2} \right)}{t \cdot (h_c + b_c + c_c + b_{ef1} + b_{ef2} + c_{ef})} \quad z_{ns} = -4.334 \text{ мм}$$

$$\psi := - \left( \frac{h_c}{2} + z_{nr} \right) \cdot \left( \frac{h_c}{2} - z_{nr} \right)^{-1} \quad \psi = -0.894$$

**Высота стенки h**

$$k_{\sigma} := 7.81 - 6.29\psi + 9.78\psi^2 \quad k_{\sigma} = 21.261 \quad \lambda_{ph} := \frac{h_p}{t} \cdot \frac{1}{28.4 \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{k_{\sigma}}} \quad \lambda_{ph} = 1.009$$

$$\rho := \min \left[ 1, \frac{\lambda_{ph} - 0.055 \cdot (3 + \psi)}{\lambda_{ph}^2} \right] \quad \rho = 0.878 \quad h_{eff} := 0.73\rho \cdot \frac{h_p}{1 - \psi} \quad h_{eff} = 49.739 \text{ мм}$$

$$h_{ef1} := 0.4 \cdot h_{eff} + g_r \quad h_{ef1} = 20.774 \text{ мм}$$

$$h_{ef2} := 0.6 \cdot h_{eff} + g_r + \left( h_p - \frac{h_p}{1 - \psi} \right) \quad h_{ef2} = 100.167 \text{ мм}$$

**Шаг 2. Определение эффективной площади с учетом редуцирующего коэффициента**

Эффективная площадь отгиба

Характеристики поперечного сечения отгиба (скругленные углы):

$$A_s := \left[ (b_{ef2} - g_r) + (c_{ef} - g_r) + u \right] \cdot t \quad A_s = 38.086 \text{ мм}^2$$

$$y_s := \frac{t \cdot (c_{ef} - g_r) \cdot \left( g_r + \frac{c_{ef} - g_r}{2} \right) + t \cdot u \cdot w}{A_s} \quad y_s = 2.282 \text{ мм}$$

$$z_s := \frac{t \cdot (b_{ef2} - g_r) \cdot \left( g_r + \frac{b_{ef2} - g_r}{2} \right) + t \cdot u \cdot w}{A_s} \quad z_s = 5.097 \text{ мм}$$

$$I_s := \frac{1}{12} \cdot (b_{ef2} - g_r) \cdot t^3 + (b_{ef2} - g_r) \cdot t \cdot y_s^2 + \frac{1}{12} \cdot t \cdot (c_{ef} - g_r)^3 + (c_{ef} - g_r) \cdot t \cdot \left( g_r + \frac{c_{ef} - g_r}{2} - y_s \right)^2 + u \cdot t \cdot (y_s - w)^2 + \frac{r_m^3 \cdot t}{12} \quad I_s = 455.698 \text{ мм}^4$$

Определение жесткости отгиба, считая что он работает как балка на упругом основании. Если другая полка растянута, то  $k_f=0$ :

$$K := \frac{E \cdot t^3}{4 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{1}{(b_c - z_s)^2 \cdot h_c + (b_c - z_s)^3 + 0.5 \cdot [(b_c - z_s)^2 \cdot h_c] \cdot 0} \quad K = 0.244 \text{ Н} \cdot \text{мм}^{-2}$$

Критическое напряжение отгиба:

$$\sigma_{cr,s} := \frac{2 \cdot \sqrt{K \cdot E \cdot I_s}}{A_s} \quad \sigma_{cr,s} = 253.942 \quad \text{МПа}$$

Определение редуцирующего коэффициента для учета изменений формы при местной потере устойчивости отгиба:

$$\lambda_d := \sqrt{\frac{f_{yb}}{\sigma_{cr,s}}} \quad \chi_d := \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda_d \leq 0.65 \\ 1.47 - 0.723 \cdot \lambda_d & \text{if } \lambda_d > 0.65 \wedge \lambda_d < 1.38 \\ \frac{0.66}{\lambda_d} & \text{if } \lambda_d \geq 1.38 \end{cases} \quad \chi_d = 0.745$$

$$\lambda_d = 1.002$$

Редуцированная площадь отгиба:

$$A_{s,red} := \chi_d \cdot A_s \cdot \frac{f_{yb} \cdot \gamma_{mo}^{-1}}{\sigma_{com.Ed}} \quad A_{s,red} = 28.393 \quad \text{мм}^2$$

$$t_{s,red} := \frac{A_{s,red}}{(b_{ef2} - g_r) + (c_{ef} - g_r) + u} \quad t_{s,red} = 0.865 \quad \text{мм}$$

Редуцированная площадь поперечного сечения профиля

$$A_{eff,b} := t \cdot [c_p + b_p + (h_{ef2} - g_r) + (h_{ef1} - g_r) + 3 \cdot u] + t_{s,red} \cdot [u + (b_{ef2} - g_r) + (c_{ef} - g_r)]$$

$$A_{eff,b} = 253.362 \quad \text{мм}^2$$

Центр тяжести эффективного поперечного сечения сжатой полки

$$z_1 := \frac{1}{A_{eff,b}} \cdot \left[ c_p \cdot t \cdot \left( h_c - \frac{c_c}{2} \right) + b_p \cdot t \cdot h_c + 2 \cdot u \cdot t \cdot (h_c - w) + (h_{ef2} - g_r) \cdot t \cdot \left( h_c - \frac{h_{ef2}}{2} \right) \dots \right]$$

$$\left[ (h_{ef1} - g_r) \cdot t \cdot \frac{h_{ef1}}{2} + (c_{ef} - g_r) \cdot t_{s,red} \cdot \frac{c_{ef}}{2} + u \cdot t \cdot w + u \cdot t_{s,red} \cdot w \right]$$

$$z_1 = 93.34 \quad \text{мм}$$

$$z_2 := h_c - z_1$$

$$z_2 = 55.5 \quad \text{мм}$$

$$\begin{aligned}
I_{\text{eff.y}} := & \frac{c_p^3 \cdot t}{12} + c_p \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - c_c + \frac{c_p}{2} \right)^2 + \frac{b_p \cdot t^3}{12} + b_p \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 + 2 \cdot u \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - w \right)^2 \dots \\
& + \frac{(h_{\text{ef2}} - g_T)^3 \cdot t}{12} + (h_{\text{ef2}} - g_T) \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - \frac{h_{\text{ef2}}}{2} \right)^2 \dots \\
& + \frac{(h_{\text{ef1}} - g_T)^3 \cdot t}{12} + (h_{\text{ef1}} - g_T) \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - \frac{h_{\text{ef1}}}{2} \right)^2 + u \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - w \right)^2 \dots \\
& + \frac{(b_{\text{ef1}} - g_T) \cdot t^3}{12} + (b_{\text{ef1}} - g_T) \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 \dots \\
& + \frac{(b_{\text{ef2}} - g_T) \cdot t_{\text{s.red}}^3}{12} + (b_{\text{ef2}} - g_T) \cdot t_{\text{s.red}} \cdot \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 \dots \\
& + \frac{(c_{\text{ef}} - g_T)^3 \cdot t_{\text{s.red}}}{12} + (c_{\text{ef}} - g_T) \cdot t_{\text{s.red}} \cdot \left( \frac{h_c}{2} - c_c + \frac{c_{\text{ef}} - g_T}{2} \right)^2
\end{aligned}$$

$$I_{\text{eff.y}} = 9.523 \times 10^5 \text{ мм}^4$$

$$W_{\text{eff.y}} := \frac{I_{\text{eff.y}}}{z_1}$$

$$W_{\text{eff.y}} = 1.02 \times 10^4 \text{ мм}^3$$

Максимально допустимый изгибающий момент:

$$M_{\text{c.Rd}} := \frac{f_{yb} \cdot W_{\text{eff.y}}}{1000 \cdot \gamma_{\text{mo}}}$$

$$M_{\text{c.Rd}} = 2.602 \times 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

### Шаг 3. Итерационный расчет.

#### Итерация 1

В итерационном расчете эффективные размеры должны быть посчитаны с учетом редуцированного сжимающего напряжения

$$\sigma_{\text{com.Ed}} := \chi_d \cdot f_{yb} \cdot \gamma_{\text{mo}}^{-1}$$

$$\sigma_{\text{com.Ed}} = 190.101 \text{ МПа}$$

$$\lambda_{\text{p.red.p}}(\lambda_p) := \lambda_p \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{\text{com.Ed}}}{\frac{f_{yb}}{\gamma_{\text{mo}}}}} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{\text{p.red}}(\lambda_p) := \lambda_p \cdot \sqrt{\chi_d}$$

#### Ширина полки b

$$\begin{aligned}
\lambda_{\text{pb.1}} := \lambda_{\text{p.red}}(\lambda_{\text{pb}}) \quad \lambda_{\text{pb.1}} = 0.643 \quad \rho := \rho_w(\lambda_{\text{pb.1}}, 1) \quad \rho = 1 \\
b_{\text{ef2}} := 0.77 \cdot 0.5 \cdot \rho \cdot b_p + g_T \quad b_{\text{ef2}} = 19.005 \text{ мм}
\end{aligned}$$

#### Ширина отгиба c

$$\begin{aligned}
\lambda_{\text{pc.1}} := \lambda_{\text{p.red}}(\lambda_{\text{pc}}) \quad \lambda_{\text{pc.1}} = 0.523 \quad \rho := \rho_o(\lambda_{\text{pb.1}}) \quad \rho = 1 \\
c_{\text{ef}} := 0.81 \rho \cdot c_p + g_T \quad c_{\text{ef}} = 11.847 \text{ мм}
\end{aligned}$$

### Эффективная площадь отгиба

Характеристики поперечного сечения отгиба(скругленные углы):

$$\Lambda_S := [(b_{ef2} - g_T) + (c_{ef} - g_T) + u] \cdot t \quad \Lambda_S = 39.214 \quad \text{мм}^2$$

$$y_S := \frac{t \cdot (c_{ef} - g_T) \cdot \left( g_T + \frac{c_{ef} - g_T}{2} \right) + t \cdot u \cdot w}{\Lambda_S} \quad y_S = 2.216 \quad \text{мм}$$

$$z_S := \frac{t \cdot (b_{ef2} - g_T) \cdot \left( g_T + \frac{b_{ef2} - g_T}{2} \right) + t \cdot u \cdot w}{\Lambda_S} \quad z_S = 5.483 \quad \text{мм}$$

$$I_S := \frac{1}{12} \cdot (b_{ef2} - g_T) \cdot t^3 + (b_{ef2} - g_T) \cdot t \cdot y_S^2 + \frac{1}{12} \cdot t \cdot (c_{ef} - g_T)^3 + (c_{ef} - g_T) \cdot t \cdot \left( g_T + \frac{c_{ef} - g_T}{2} - y_S \right)^2 + u \cdot t \cdot (y_S - w)^2 + \frac{r_m^3 \cdot t}{12} \quad I_S = 461.528 \quad \text{мм}^4$$

Определение жесткости отгиба, считая что он работает как балка на упругом основании. Если другая полка растянута, то  $k_f=0$ :

$$K := \frac{E \cdot t^3}{4 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{1}{(b_c - z_S)^2 \cdot h_c + (b_c - z_S)^3 + 0.5 \cdot [(b_c - z_S)^2 \cdot h_c] \cdot 0} \quad K = 0.249 \quad \text{Н} \cdot \text{мм}^{-2}$$

Критическое напряжение отгиба:

$$\sigma_{cr,s} := \frac{2 \cdot \sqrt{K \cdot E \cdot I_S}}{\Lambda_S} \quad \sigma_{cr,s} = 250.673 \quad \text{МПа}$$

Определение редуцирующего коэффициента для учета изменений формы при местной потере устойчивости отгиба:

$$\lambda_d := \sqrt{\frac{f_{yb}}{\sigma_{cr,s}}} \quad \lambda_d = 1.009 \quad \chi_{d,1} := \chi_{cd}(\lambda_d)$$

$$\chi_{d,1} = 0.741 < \chi_d = 0.745 \quad \text{Условие выполнено}$$

Итерационный расчет должен быть закончен, когда  $\chi(n) = \alpha \cdot \chi \cdot (n - 1)$ , но  $\chi(n) \leq \chi \cdot (n - 1)$

$$\sigma_{com.Ed,1} := \chi_{d,1} \cdot f_{yb} \cdot \gamma_{mo}^{-1} \quad \sigma_{com.Ed,1} = 188.901 \quad \text{МПа} \quad \sigma_{com.Ed} = 190.101 \quad \text{МПа}$$

Редуцированная площадь отгиба:

$$\Lambda_{s,red} := \chi_{d,1} \cdot \Lambda_S \cdot \frac{f_{yb} \cdot \gamma_{mo}^{-1}}{\sigma_{com.Ed}} \quad \Lambda_{s,red} = 38.966 \quad \text{мм}^2$$

$$t_{s,\text{red}} := \frac{A_{s,\text{red}}}{(b_{\text{ef}2} - g_{\text{r}}) + (c_{\text{ef}} - g_{\text{r}}) + u} \quad t_{s,\text{red}} = 1.153 \text{ мм}$$

Редуцированная площадь поперечного сечения профиля

$$A_{\text{eff},b} := t \cdot [c_{\text{p}} + b_{\text{p}} + (h_{\text{cf}2} - g_{\text{r}}) + (h_{\text{cf}1} - g_{\text{r}}) + 3 \cdot u] + t_{s,\text{red}} \cdot [u + (b_{\text{cf}2} - g_{\text{r}}) + (c_{\text{ef}} - g_{\text{r}})]$$

$$A_{\text{eff},b} = 263.935 \text{ мм}^2$$

Центр тяжести эффективного поперечного сечения сжатой полки

$$z_1 := \frac{1}{A_{\text{eff},b}} \cdot \left[ c_{\text{p}} \cdot t \cdot \left( h_{\text{c}} - \frac{c_{\text{c}}}{2} \right) + b_{\text{p}} \cdot t \cdot h_{\text{c}} + 2 \cdot u \cdot t \cdot (h_{\text{c}} - w) + (h_{\text{ef}2} - g_{\text{r}}) \cdot t \cdot \left( h_{\text{c}} - \frac{h_{\text{ef}2}}{2} \right) \dots \right. \\ \left. + (h_{\text{ef}1} - g_{\text{r}}) \cdot t \cdot \frac{h_{\text{ef}1}}{2} + (c_{\text{ef}} - g_{\text{r}}) \cdot t_{s,\text{red}} \cdot \frac{c_{\text{ef}}}{2} + u \cdot t \cdot w + u \cdot t_{s,\text{red}} \cdot w \right]$$

$$z_1 = 89.677 \text{ мм} \quad z_2 := h_{\text{c}} - z_1 \quad z_2 = 59.162 \text{ мм}$$

$$I_{\text{eff},y} := \frac{c_{\text{p}}^3 \cdot t}{12} + c_{\text{p}} \cdot t \cdot \left( \frac{h_{\text{c}}}{2} - c_{\text{c}} + \frac{c_{\text{p}}}{2} \right)^2 + \frac{b_{\text{p}} \cdot t^3}{12} + b_{\text{p}} \cdot t \cdot \left( \frac{h_{\text{c}}}{2} \right)^2 + 2 \cdot u \cdot t \cdot \left( \frac{h_{\text{c}}}{2} - w \right)^2 \dots \\ + \frac{(h_{\text{ef}2} - g_{\text{r}})^3 \cdot t}{12} + (h_{\text{ef}2} - g_{\text{r}}) \cdot t \cdot \left( \frac{h_{\text{c}}}{2} - \frac{h_{\text{ef}2}}{2} \right)^2 \dots \\ + \frac{(h_{\text{ef}1} - g_{\text{r}})^3 \cdot t}{12} + (h_{\text{ef}1} - g_{\text{r}}) \cdot t \cdot \left( \frac{h_{\text{c}}}{2} - \frac{h_{\text{ef}1}}{2} \right)^2 + u \cdot t \cdot \left( \frac{h_{\text{c}}}{2} - w \right)^2 \dots \\ + \frac{(b_{\text{ef}1} - g_{\text{r}})^3 \cdot t}{12} + (b_{\text{ef}1} - g_{\text{r}}) \cdot t \cdot \left( \frac{h_{\text{c}}}{2} \right)^2 \dots \\ + \frac{(b_{\text{ef}2} - g_{\text{r}})^3 \cdot t_{s,\text{red}}}{12} + (b_{\text{ef}2} - g_{\text{r}}) \cdot t_{s,\text{red}} \cdot \left( \frac{h_{\text{c}}}{2} \right)^2 \dots \\ + \frac{(c_{\text{ef}} - g_{\text{r}})^3 \cdot t_{s,\text{red}}}{12} + (c_{\text{ef}} - g_{\text{r}}) \cdot t_{s,\text{red}} \cdot \left( \frac{h_{\text{c}}}{2} - c_{\text{c}} + \frac{c_{\text{ef}} - g_{\text{r}}}{2} \right)^2$$

$$I_{\text{eff},y} = 9.994 \times 10^5 \text{ мм}^4$$

$$W_{\text{eff},y} := \frac{I_{\text{eff},y}}{z_1}$$

$$W_{\text{eff},y} = 1.114 \times 10^4 \text{ мм}^3$$

Максимально допустимый изгибающий момент:

$$M_{\text{c},\text{Rd},1} := \frac{f_{\text{yb}} \cdot W_{\text{eff},y}}{1000 \cdot \gamma_{\text{mo}}}$$

$$M_{\text{c},\text{Rd},1} = 2.842 \times 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

$$\frac{M_{\text{c},\text{Rd},1}}{M_{\text{c},\text{Rd}}} = 1.092$$

## Итерация 2

В итерационном расчете эффективные размеры должны быть посчитаны с учетом редуцированного сжимающего напряжения

$$\sigma_{\text{com.Ed}} := \chi_{d,1} \cdot f_{yb} \cdot \gamma_{mo}^{-1} \quad \sigma_{\text{com.Ed}} = 188.901 \quad \text{МПа}$$

$$\lambda_{p,\text{red.p}}(\lambda_p) := \lambda_p \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{\text{com.Ed}}}{\frac{f_{yb}}{\gamma_{mo}}}} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{p,\text{red}}(\lambda_p) := \lambda_p \cdot \sqrt{\chi_{d,1}}$$

### Ширина полки b

$$\lambda_{pb,1} := \lambda_{p,\text{red}}(\lambda_{pb}) \quad \lambda_{pb,1} = 0.641 \quad \rho := \rho_w(\lambda_{pb,1}, 1) \quad \rho = 1$$

$$b_{\text{ef}2} := 0.77 \cdot 0.5 \cdot \rho \cdot b_p + g_r \quad b_{\text{ef}2} = 19.005 \text{ мм}$$

### Ширина отгиба c

$$\lambda_{pc,1} := \lambda_{p,\text{red}}(\lambda_{pc}) \quad \lambda_{pc,1} = 0.521 \quad \rho := \rho_o(\lambda_{pb,1}) \quad \rho = 1$$

$$c_{\text{ef}} := 0.81 \rho \cdot c_p + g_r \quad c_{\text{ef}} = 11.847 \text{ мм}$$

### Эффективная площадь отгиба

Характеристики поперечного сечения отгиба(скругленные углы):

$$A_s := [(b_{\text{ef}2} - g_r) + (c_{\text{ef}} - g_r) + u] \cdot t \quad A_s = 39.214 \quad \text{мм}^2$$

$$y_s := \frac{t \cdot (c_{\text{ef}} - g_r) \cdot \left( g_r + \frac{c_{\text{ef}} - g_r}{2} \right) + t \cdot u \cdot w}{A_s} \quad y_s = 2.216 \text{ мм}$$

$$z_s := \frac{t \cdot (b_{\text{ef}2} - g_r) \cdot \left( g_r + \frac{b_{\text{ef}2} - g_r}{2} \right) + t \cdot u \cdot w}{A_s} \quad z_s = 5.483 \text{ мм}$$

$$I_s := \frac{1}{12} \cdot (b_{\text{ef}2} - g_r) \cdot t^3 + (b_{\text{ef}2} - g_r) \cdot t \cdot y_s^2 + \frac{1}{12} \cdot t \cdot (c_{\text{ef}} - g_r)^3 + \dots$$

$$+ (c_{\text{ef}} - g_r) \cdot t \cdot \left( g_r + \frac{c_{\text{ef}} - g_r}{2} - y_s \right)^2 + u \cdot t \cdot (y_s - w)^2 + \frac{r_m^3 \cdot t}{12} \quad I_s = 461.528 \quad \text{мм}^4$$

Определение жесткости отгиба, считая что он работает как балка на упругом основании.

Если другая полка растянута, то  $k_f=0$ :

$$K := \frac{E \cdot t^3}{4 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{1}{(b_c - z_s)^2 \cdot h_c + (b_c - z_s)^3 + 0.5 \cdot [(b_c - z_s)^2 \cdot h_c] \cdot 0} \quad K = 0.249 \quad \text{Н} \cdot \text{мм}^{-2}$$

Критическое напряжение отгиба:

$$\sigma_{\text{cr,s}} := \frac{2 \cdot \sqrt{K \cdot E \cdot I_s}}{A_s} \quad \sigma_{\text{cr,s}} = 250.673 \quad \text{МПа}$$

Определение редуцирующего коэффициента для учета изменений формы при местной

потере устойчивости отгиба:

$$\lambda_d := \sqrt{\frac{f_{yb}}{\sigma_{cr,s}}} \quad \lambda_d = 1.009 \quad \chi_{d,2} := \chi_{cd}(\lambda_d)$$

$$\chi_{d,2} = 0.741 = \chi_{d,1} = 0.741 \quad \text{Условие выполнено}$$

Итерационный расчет должен быть закончен, когда  $\chi(n) = \mu \cdot \chi \cdot (n - 1)$ , но  $\chi(n) \leq \chi \cdot (n - 1)$

$$\sigma_{com.Ed.1} := \chi_{d,1} \cdot f_{yb} \cdot \gamma_{mo}^{-1} \quad \sigma_{com.Ed.1} = 188.901 \text{ МПа} \quad \sigma_{com.Ed} = 188.901 \text{ МПа}$$

Редуцированная площадь отгиба:

$$A_{s,red} := \chi_{d,2} \cdot A_s \cdot \frac{f_{yb} \cdot \gamma_{mo}^{-1}}{\sigma_{com.Ed}} \quad A_{s,red} = 39.214 \text{ мм}^2$$

$$t_{s,red} := \frac{A_{s,red}}{(b_{ef2} - g_r) + (c_{ef} - g_r) + u} \quad t_{s,red} = 1.16 \text{ мм}$$

Редуцированная площадь поперечного сечения профиля

$$A_{eff,b} := t \cdot [c_p + b_p + (h_{ef2} - g_r) + (h_{ef1} - g_r) + 3 \cdot u] + t_{s,red} \cdot [u + (b_{ef2} - g_r) + (c_{ef} - g_r)]$$

$$A_{eff,b} = 264.183 \text{ мм}^2$$

Центр тяжести эффективного поперечного сечения сжатой полки

$$z_1 := \frac{1}{A_{eff,b}} \cdot \left[ c_p \cdot t \cdot \left( h_c - \frac{c_c}{2} \right) + b_p \cdot t \cdot h_c + 2 \cdot u \cdot t \cdot (h_c - w) + (h_{ef2} - g_r) \cdot t \cdot \left( h_c - \frac{h_{ef2}}{2} \right) \dots \right]$$

$$\left[ + (h_{ef1} - g_r) \cdot t \cdot \frac{h_{ef1}}{2} + (c_{ef} - g_r) \cdot t_{s,red} \cdot \frac{c_{ef}}{2} + u \cdot t \cdot w + u \cdot t_{s,red} \cdot w \right]$$

$$z_1 = 89.595 \text{ мм}$$

$$z_2 := h_c - z_1$$

$$z_2 = 59.245 \text{ мм}$$

$$\begin{aligned}
I_{\text{eff.y}} := & \frac{c_p^3 \cdot t}{12} + c_p \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - c_c + \frac{c_p}{2} \right)^2 + \frac{b_p \cdot t^3}{12} + b_p \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 + 2 \cdot u \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - w \right)^2 \dots \\
& + \frac{(h_{\text{ef2}} - g_r)^3 \cdot t}{12} + (h_{\text{ef2}} - g_r) \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - \frac{h_{\text{ef2}}}{2} \right)^2 \dots \\
& + \frac{(h_{\text{ef1}} - g_r)^3 \cdot t}{12} + (h_{\text{ef1}} - g_r) \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - \frac{h_{\text{ef1}}}{2} \right)^2 + u \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} - w \right)^2 \dots \\
& + \frac{(b_{\text{ef1}} - g_r) \cdot t^3}{12} + (b_{\text{ef1}} - g_r) \cdot t \cdot \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 \dots \\
& + \frac{(b_{\text{ef2}} - g_r) \cdot t_{\text{s.red}}^3}{12} + (b_{\text{ef2}} - g_r) \cdot t_{\text{s.red}} \cdot \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 \dots \\
& + \frac{(c_{\text{ef}} - g_r)^3 \cdot t_{\text{s.red}}}{12} + (c_{\text{ef}} - g_r) \cdot t_{\text{s.red}} \cdot \left( \frac{h_c}{2} - c_c + \frac{c_{\text{ef}} - g_r}{2} \right)^2
\end{aligned}$$

$$I_{\text{eff.y}} = 1 \times 10^6 \quad \text{мм}^4$$

$$W_{\text{eff.y}} := \frac{I_{\text{eff.y}}}{z_1}$$

$$W_{\text{eff.y}} = 1.117 \times 10^4 \quad \text{мм}^3$$

Максимально допустимый изгибающий момент:

$$M_{\text{c.Rd.2}} := \frac{f_{yb} \cdot W_{\text{eff.y}}}{1000 \cdot \gamma_{\text{mo}}}$$

$$M_{\text{c.Rd.2}} = 2.847 \times 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

$$\frac{M_{\text{c.Rd.2}}}{M_{\text{c.Rd.1}}} = 1.002$$

## Заключение

ЛСТК широко применяется в малоэтажном жилом строительстве, строительстве складов, ангаров, мансард. В последнее время тонкостенным профилям находят новое применение. Примером может служить пешеходный надземный переход пролетом 12 метров, ферма покрытия пролетом 70 метров, построенная в Московской области, девятиэтажный жилой дом. К основным преимуществам следует отнести экономию металла, низкий вес, легкость и быстроту монтажа. Однако стальные холодногнутые элементы имеют ряд особенностей работы, таких как наличие зон упрочнения в местах гибки, присущая только тонкостенным элементам потеря устойчивости поперечного сечения. Большой проблемой является отсутствие норм на проектирование в России и отсутствие рекомендаций по расчету перфорированных профилей в Еврокодах. Данное обстоятельство сильно усложняет жизнь конструкторам при проектировании конструкций из термопрофилей. Однако их применение необходимо для избегания наличия мостиков холода в ограждающих конструкциях сооружения.

В работе были поставлены следующие научно-технические задачи:

6. Разработать оболочечную модель стойки составного замкнутого сечения;
7. Рассмотреть влияние сдвиговых усилий и касательных напряжений на устойчивость замкнутого стержня;
8. Сравнить распределение напряжений в перфорированном и цельном профиле при сжатии и изгибе;
9. Получить коэффициент перехода от цельного профиля к перфорированному;
10. Разработать методику по расчету перфорированных профилей с учетом редуцированных характеристик при изгибе.

Основоположниками расчета тонкостенных профилей следует считать профессора С. П. Тимошенко, который еще в 1905—1906 гг. при рассмотрении вопроса об общей устойчивости двутавровой балки исследовал изгибающее действие кручения и вывел формулу угла закручивания балки с одним заделанным концом, которую проверил также опытным путем. В 1910 г. профессор С. П. Тимошенко опубликовал составленное им общее уравнение для угла закручивания двутавровой балки, опертой обоими концами и подверженной по длине своей действию крутящего момента.

В. З. Власова независимо от других авторов в 1936 г. дал наиболее общую теорию расчета любых тонкостенных незамкнутых профилей на совместное действие изгиба и кручения. Исходя из гипотезы о недеформируемости контура поперечного сечения, он установил общий закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении тонкостенного стержня при совместном действии изгиба и кручения. Поэтому закону

нормальные напряжения в самом общем случае работы стержня распределяются по сечению пропорционально секториальной площади.

Г.И. Белым, профессором Санкт-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета, предложен приближенный аналитический метод расчета тонкостенных стержней по деформированной схеме. Решение основано на аппроксимации пространственных форм деформирования в виде линейной комбинацией частных форм: форм, полученных недеформационным расчетом, и форм потери устойчивости. Физическая нелинейность учитывается введением дополнительных пространственных перемещений сечений стержня.

Среди аналитических методов расчета тонкостенных стержней в работе был выделен метод, описанный в Еврокоде. В диссертационной работе изложена последовательность теории расчета по Еврокоду и составлен документ в программе Mathcad, который позволяет автоматически найти редуцированные характеристики профиля, предельную нагрузку при сжатии и предельный момент при изгибе. В работе была выполнена серия расчетов профилей по сортаменту компании Балтпрофиль, и получены их характеристики, выведены ряды закономерностей.

В настоящее время в литературе все большее внимание уделяется исследованию вопросов устойчивости тонкостенных профилей под действием нагрузок, отличающихся от классических значительной сложностью по своему характеру. Естественным при этом является стремление учесть всевозможные факторы, оказывающие влияние на величины критических нагрузок, такие, как комбинированное действие нагрузок, анизотропия и неоднородность материала, различные граничные условия и т.д. Решение этих вопросов в последнее время стало возможным благодаря широкому использованию средств вычислительной техники. На этом пути было получено много новых интересных результатов, касающихся оценке изгиба и устойчивости профилей и разработки алгоритмов решения подобного рода задач.

Наиболее распространенный численный метод расчета это метод конечных элементов (МКЭ). Применение МКЭ связано с предварительным разбиением континуальной области на конечные элементы какой-либо формы и представлением решения в пределах элемента в виде многочлена с малым конечным носителем. Система уравнений МКЭ непосредственно получается из условия минимума полной потенциальной энергии, т.е. из вариационного уравнения Лагранжа. Расчет конструкций из тонкостенных стержней может выполняться с использованием конечных элементов двух типов: оболочечные и стержневые.

Большой вклад в развитие теории тонкостенных конечных элементов внес А.Р.Туснин. В одной из своих работ он сделал вывод, что наиболее рационально для

расчета сложных пространственных конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля использовать стержневые тонкостенные конечные элементы, учитывающих не только чистое, но и стесненное кручение при совпадении и несовпадении центров тяжести и изгиба, наличии или отсутствии эксцентриситетов в узлах.

Обзор литературы показал, что зарубежными и отечественными учеными широко освещено описание численных, теоретических расчетов и экспериментальных данных для профилей открытого сечения, однако мало затрагивается вопрос касательных напряжений и деформаций сдвига.

Поэтому в работе стояла цель определить значения касательных напряжений при сжатии в стойках различной длины, имеющих составное коробчатое сечение, найти закономерность их распределения, а также влияние их на несущую способность. Методом конечных элементов были смоделированы стойки длиной 150мм, 550мм, 1100мм, 1700мм и одинаковым поперечным сечением. Для подтверждения правильности построенных моделей были сравнены вертикальные перемещения стоек с экспериментальными данными, выполненных Демао Янгом, д.т.н сиднейского университета. Результаты показали, что метод конечных элементов дает правдоподобные результаты и может быть успешно использован для расчета тонкостенных профилей. Средняя относительная погрешность составила 26%. Рассмотрение касательных напряжений показало, что среднее значение касательных напряжений остается постоянным не зависимо от высоты стойки, и их значения являются незначительными по сравнению с нормальными напряжениями. Значения нормальных напряжений больше касательных в среднем в 15 раз.

Далее в работе рассматривалось распределение нормальных напряжений при изгибе в цельном профиле и перфорированном. Для этого методом конечных элементов были смоделированы плоские рамы, стойки которых имели высоту 500 мм и сечение с высотой стенки 150мм, 200мм и толщиной металла 0,8; 1,0; 1,2; 1,5; 2,0мм. В отличие от «классического» распределения напряжений при изгибе в цельном профиле, в перфорированном наблюдаются скачки напряжений от сжатия к растяжению в местах перфорации. В среднем нормальные напряжения в перфорированном стержне по сравнению с цельным выше на 25%. На основе полученных результатов был вычислен коэффициент, показывающий разницу в распределении напряжений в элементах поперечного сечения профиля. Были выведены средние коэффициенты перфорации для стенок, полок и отгибов различных профилей. Полученные коэффициенты перфорации были использованы при вычислении эффективной ширины элементов поперечного сечения перфорированного профиля, умножая эффективную ширину на данные коэффициенты. В итоге для рассматриваемых перфорированных профилей были вычислены редуцированные характеристики при изгибе. Было получено, что наличие

перфорации снижает несущую способность профиля при изгибе в среднем на 17%.

На публичную защиту выносятся следующие основные научные результаты и положения, полученные автором в работе:

1. Смоделированы тонкостенные профили замкнутого коробчатого типа различной длины, произведена серия расчетов по деформациям. Перемещения и форма потери устойчивости хорошо согласуются с экспериментальными данными. Показано, что расхождения в результатах составили в среднем 26%.
2. Показано, что распределение касательных напряжений не зависит от высоты профиля и мало влияет на его несущую способность. Значения нормальных напряжений больше касательных в среднем в 15 раз.
3. Показано, что наличие перфорации в стенке увеличивает значение касательных напряжений в среднем на 10,5%.
4. Произведен расчет стоечных профилей на сжатие и изгиб с учетом редуцированных характеристик аналитическим методом. Приведены данные о эффективной площади поперечного сечения при сжатии и эффективного момента сопротивления при изгибе. Показано что несмотря на то, что профили высотой 200 мм имеют большую площадь по сравнению с профилями высотой 150 мм, они имеют равную эффективную площадь при сжатии.
5. Предложена методика линейного расчета тонкостенных стоек открытого профиля на изгиб.
6. Показано, что наличие перфорации в стенке профиля увеличивает значения нормальных напряжений на 25%. Найдены коэффициенты перехода от цельного профиля к перфорированному для стенок, полок, отгибов.
7. Предложен метод расчета перфорированных профилей на изгиб с учетом редуцированных характеристик, используя формулы Еврокода, уточненные полученными коэффициентами. Показано, что наличие перфорации снижает несущую способность стоек при изгибе в среднем на 17%.
8. Методика расчета перфорированных тонкостенных профилей на изгиб с учетом редуцированных характеристик внедрены в процесс проектирования в проектной организации ПНИПКУ «Венчур».

Задачей дальнейших исследований является моделирование тонкостенных перфорированных профилей МКЭ с более сложными нагружениями, при которых стойки претерпевают изгиб со сдвигом, изгиб с кручением, изгиб в нескольких плоскостях, с целью нахождения нормальных и касательных напряжений и разработки методов по их расчету.

Перечень публикаций по теме работы:

1. Смазнов Д.Н., Шатов Д.С. Конечноэлементное моделирование стоек замкнутого сечения из холодногнутых профилей. // Вестник ВолгГАСУ - 2011г. – 8 с.
2. Шатов Д.С. Конечноэлементное моделирование перфорированных стоек открытого сечения из холодногнутых профилей. // Инженерно-строительный журнал. – 2011.- с 32-35.
3. Шатов Д.С. Потеря устойчивости перфорированных стальных тонкостенных колонн // XXXIX неделя науки СПбГПУ : материалы Междунар. науч.-практ. конф. 2010г.
4. Шатов Д.С. Моделирование работы тонкостенной стальной стойки в САД и оптимизация расчета по Еврокоду // XXXVIII неделя науки СПбГПУ : материалы Междунар. науч.-практ. конф. 2009г.

Перечень апробаций:

1. Шатов Д.С. Обзор Еврокода 3 часть 1-3 Общие правила. Дополнительные правила для холодногнутых элементов и профилированных листов. // Международный семинар «Использование Еврокодов в Российской Федерации: текущее состояние дел и перспективы». 2011г.
2. Шатов Д.С. Потеря устойчивости перфорированных стальных тонкостенных колонн // XXXIX неделя науки СПбГПУ : материалы Междунар. науч.-практ. конф. 2010г.
3. Шатов Д.С. Моделирование работы тонкостенной стальной стойки в САД и оптимизация расчета по Еврокоду // XXXVIII неделя науки СПбГПУ : материалы Междунар. науч.-практ. конф. 2009г.

## Список использованных источников

1. Ватин Н. И., Попова Е. Н. Термопрофиль в легких стальных строительных конструкциях. – СПб, 2006.
2. Филин А.П. Современные проблемы использования ЭЦВМ в механике твердого деформируемого тела.- Л., Стройиздат. Ленинградское отделение, 1974
3. Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов: С краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений: пер. с англ./ Под ред. А.Н. Митинского. Изд. 2-е, стереотипное.– М.: КомКнига, 2006. – 536 с.
4. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. М.:1940г.- 568 с.
5. Белый Г.И. Расчет упругопластических тонкостенных стержней попространственно-деформируемой схеме // Строительная механика сооружений: Межвуз. темат. сб. тр; ЛИСИ. №42. 1983. С. 40-48.
6. Перельмутер А. В., Сливкер В. И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. М.: Изд-во: ДМК Пресс, 2002 г. 618 с.
7. EN 1993-1-3 «Eurocode 3: Design of steel structures – Part 1-3: General rules – Supplementary rules for cold formed members and sheeting». 1993. - 192 с.
8. Туснин А.Р. Численный расчет конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля. М.: МГСУ: Изд-во АСВ, 2009. 143 с.
9. Yung D. Compression stability of high strength steel sections with low strain-hardening. Degree of Doctor. Sydney, 2003.
10. Бычков Д.В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций - М.: Госстройиздат, 1962.
11. Власов В.З. Избранные труды, Т. 2.. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
12. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике.- М.: Гостехиздат, 1949.- 784 с.
13. Власов В.З. Новый практический метод расчета складчатых покрытий и оболочек // Строительная промышленность. -1932.- №11.- С.33-38; № 12.-С.21-26.
14. Власов В.З. Кручение и устойчивость тонкостенных открытых профилей // Строительная промышленность. - 1938.- №6.- С.49-53; № 7.- С.55-60.
15. Уманский А.А. Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций.- М.:Оборонгиз, 1939.- 112 с.
16. Урбан И.В. Теория расчета стержневых тонкостенных конструкций.- М., 1955.-192 с.
17. Джанелидзе Г.Ю., Пановко Я.Г. Статика упругих тонкостенных стержней.- М., 1948.- 208 с.
18. Джанелидзе Г.Ю. К теории тонких и тонкостенных стержней // Прикладная математика и механика.- 1949.- вып.6.- том XIII.- С.597-608.
19. Джанелидзе Г.Ю. Вариационная формулировка теории тонкостенных упругих стержней В.З.Власова // Прикладная математика и механика.-1943.- Т.VII- вып.6.- С.455-462.
20. Александров В.Г. Расчет тонкостенных неразрезных балок на совместное действие изгиба и кручения при подвижной нагрузке // Дис... канд. техн. наук. Ростов н/Д, 1948. 130 с.
21. Анучкин А.П. Изыскание оптимальных форм балок и колонн из тонкостенных штампованных профилей // Дис... канд. техн. наук. М., 1949. 169 с.
22. Бычков Д.В., Мрощинский А.К. Кручение металлических балок.- М., 1944. 260 с.
23. Бычков Д.В. Расчет балочных и рамных стержневых систем из тонкостенных элементов // Дис... д-ра техн. наук. М., 1945. 296 с.
24. Бычков Д.В. Расчет балочных и рамных стержневых систем из тонкостенных элементов.- М., 1948. 208 с.
25. Бычков Д.В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций.- М., 1962. 476 с.
26. Горбунов Б.Н., Стрельбицкая А.И. Теория рам из тонкостенных стержней.- М., 1948, 198 с.

27. Самарский А.А. Всесоюзная школа молодых ученых: Теория и прикладные проблемы вычислительной математики и математической физики // Журнал вычислит, математики и математич. физики.- 1983.- 23, № 1.- 246-247.
28. Образцов И.Ф. О проблемах статики и динамики современных инженерных конструкций. Состояние вопроса, новые проблемы и перспективы// Проблемы прочности.-1982.-№ П . - С . 3-11.
29. Серазутдинов М.Н. О методе построения аппроксимирующих функций в задачах расчета пластин и оболочек сложной формы// Теория и численные методы расчета пластин и оболочек. Труды Всесоюзн. совещания-семинара в Тбилиси.- Т.2.- 294-304.
30. Василенко А.Т., Урусова Г.П. Решение задачи об изгибе свободно опертой анизотропной эллиптической пластины// Прикладная механика.- 1998.- Т. 34 (44).- № 5. - 98-104.
31. Курант Р. Уравнения с частными производными.- М.: Мир, 1964.- 832 с.
32. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов.- М.: Стройиздат, 1982.- 448 с.
33. Голованов А.И. Сравнительный анализ различных схем расчета оболочек произвольной геометрии методом конечных элементов// Исследования по теории оболочек. Труды семинара.- Вып. 21.- Ч. 1.- Казань: Казанский физ.-техн. ин-т КФАН СССР.- 104-111.
34. Голованов А.И., Корнишин М.С. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек.- Казань: Казан, физ.-техн. ин-т, 1989.- 270 с.
35. Корнишин М.С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения.- М.: Наука, 1964.- 192 с.
36. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике.- М.: Мир, 1975.- 511с.
37. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация.- М.: Мир, 1986.- 318с.
38. Постнов В.А. Численные методы расчета судовых конструкций.- Л.: Судостроение, 1974.-344 с.
39. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин.- Рига: Зинатне, 1988.-284 с.
40. Resaiee-Pajand M., Maayedian M. Explicit stiffness of tapered and monosymmetric I beam-columns II International Journal of Engineering.-2000.-v.13.-N2.-p.1-18.
41. S.C. Lau, G.J. Hancock. Distortional Buckling Formulas for Channel Columns. Journal of Structural Engineering (ASCE). 1987. – 113 с.
42. B.W. Schafer, T. Peköz. Laterally Braced Cold-Formed Steel Members with Edge Stiffened Flanges. Journal of Structural Engineering (ASCE). 1999. – 125 с.
43. Y.B. Kwon, G.J. Hancock. Strength Tests of Cold-Formed Channel Sections Undergoing Local and Distortional Buckling. Journal of Structural Engineering (ASCE). 1992. – 117 с.
44. L.C. Prola, D. Camotim, D., "On the Distortional Post-Buckling Behavior of Cold-Formed Lipped Channel Steel Columns". Proceedings of SSRC 2002 Annual Stability Conference, Seattle. 2002. – 571 с.
45. Cheng Y., Schafer B.W. Simulation of cold-formed steel beams in local and distortional buckling with applications to the direct strength method // Journal of Constructional Steel Research. Volume 63, Issue 5. 2007. P. 581-590.
46. Rasmussen K.J.R. Experimental investigation of local-overall interaction buckling of stainless steel lipped channel columns // Journal of Constructional Steel Research. Volume 65, Issues 8-9. 2009. P. 1677-1684.
47. Bertelsbeck M.S. Experimentelle und analytische untersuchung von kaltgeformten. sigma-profilen unter druckbeanspruchung. Diplomarbeit. Dortmund, 2009. 269 p.
48. Eccher G., Rasmussen K.J.R., Zandonini R. Elastic buckling analysis of perforated thin-walled structures by the isoparametric spline finite strip method // Thin-walled Structures. Vol. 46. 2008. P. 165-191.
49. Sputo T., Turner J. Bracing of cold-formed steel structures: A design guide. Prepared under contract to American Society of Civil Engineers-Structural Engineering Institute (ASCE-SEI), 2005. 149 pages.
50. Hancock G.J. Compression tests of high strength cold-formed steel channels with buckling interaction // Journal of Constructional Steel Research. Volume 65, Issue 2. 2009. P. 278-289.

51. B.W. Schafer. Local, distortional, and euler buckling of thin-walled columns. Journal of structural engineering. 2002. - 11 с.
52. Юрченко В.В. Проектирование каркасов зданий из тонкостенных холодногнутых профилей в среде «SCAD Office» // Инженерно-строительный журнал. 2010. № 8. С. 38-46.
53. Смазнов Д. Н. Устойчивость при сжатии составных колонн, выполненных из профилей из высокопрочной стали // Инженерно-строительный журнал. – 2009. – №3(5). – С. 42-49.
54. Смазнов Д. Н. Моделирование работы тонкостенных стальных профилей в «СКАД» // Наука и инновации в технических университетах : материалы Третьего Всерос. форума студентов, аспирантов и молодых ученых. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2009. – С. 33-34.
55. Смазнов Д. Н. Конечноэлементное моделирование работы жестких вставок тонкостенных холодноформованных стальных профилей // Научный журнал КубГАУ. – 2011. – №67(03). – С. 54-67.;
56. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. Т.5, М., 1973. 272 с.
57. Гольденвейзер А.Л. Теории тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
58. Katy S. Finite Element Modeling of Shear in Thin Walled Beams with a Single Warping Function. UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES Faculté des Sciences Appliquées Services des Milieux Continus & Génie Civil. – 2005. – 134 p.
59. Frey F. Analyse des structures et milieux continus. Traité de Génie Civil de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. Volume 2. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, CH-1015 Lausanne. – 2000. - 193 p.
60. Pilkey W. Formulas for stress, strain, and structural matrices. New York. – 1994.- 28 p.
61. Batoz J.L., Dhatt G. Modélisation des structures par éléments finis. Volume 2, poutres et plaques. Hermès edition, Paris. . – 1990. - 28 p.
62. Cheng Y., B. W. Schafer. Distortional buckling of cold-formed steel members in bending. American Iron and Steel Institute Baltimore, Maryland. – 2005. – 213 p.
63. Eccher G. Isoparametric spline finite strip analysis of perforated thin-walled steel structures. Trento. – 2007. – 176 p.
64. Moen C. Direct Strength Design for Cold-Formed Steel Members with Perforations. Progress Report No. 4. – 2007. – 57 p.
65. Clarin M. Local buckling and residual stresses. Department of Civil and Environmental Engineering. ISSN: - 2004. – p. 1402-1757.
66. Kaitila O. Web clipping of cold-formed thin-walled steel cassettes. Helsinki University of Technology Laboratory of Steel Structures. Espoo. – 2004. – 76 p.
67. Wilkinson T. Suitability of cold-formed rectangular hollow sections for use in plastic design. The university of Sydney. – 2004. – 184 p.
68. Aguirre C.A., Federico S.M. Structural properties of connections for rack structures. University, Valparaiso, Chile. Magazine "Connections in Steel Structures V" - Amsterdam – 2004. – p. 35-47.
69. Cortese S.D. Investigation of single span Z-section purlins supporting standing seam roof systems considering distortional buckling. Virginia Polytechnic Institute and State University. – 2001. – 164 p.
70. Yung D. Suitability of cold-formed rectangular hollow sections for use in plastic design. PhD. Sydney. - 2003. – 311 p.
71. Kıymaz G. Stability Criteria for Thin-Walled Box Columns of High Performance Steel in Axial Compression. PhD Thesis, Department of Civil Engineering, Imperial College, London, 1999.
72. Casafont M., Roure F., Peköz T. Compression tests on uprights: Checks for the effects of distortional buckling. 2nd ERF Workshop "Tests on racking systems" Barcelona (Spain), - 2010.
73. Yu W.W., LaBoube R.A. Cold-Formed Steel Design. ISBN: 978-0-470-46245-4. Hardcover. – 2010. – 512 p.

74. Семенов А.С. Ферма из холодногнутых профилей повышенной жесткости с болтовыми соединениями. Липецк. – 2009. – 183 с.
75. Чередниченко А.В. Разработка методики проектирования и исследование процесса гибки тонколистовых профилей повышенной жесткости. Москва. – 2002. – 161 с.
76. Нургазиев Р.Б. Статический расчет пространственных мембранно-стержневых систем с учетом геометрической и конструктивной нелинейности. Саратов. – 2004. -245 с.
77. Кретинин А.Н. Тонкостенные балки из гнутых оцинкованных профилей: составных поясов коробчатого сечения и гофрированных стенок. Новосибирск. – 2008. – 138 с.
78. Мещерякова Е.В. Напряженно-деформированное состояние многослойных конструкций покрытия на основе тонкостенных холодноформованных профилей. Липецк. – 2007. -189 с.
79. Астахов И.В. Пространственная устойчивость элементов конструкций из холодногнутых профилей. Санкт-Петербург. – 2006. - 123 с.
80. Moen C.D., Schafer B. W. Elastic buckling of cold-formed steel columns and beams with holes. *Engineering Structures*, 31(12). - 2009. - p 2812-2824.
81. Moen C.D., Schafer B. W. Elastic buckling of thin plates with holes in compression or bending. *Thin-Walled Structures*, 47(12). - 2009. - p 1597-1607.
82. Li, Z. Schafer, B. W., and Moen C.D. Computational modeling of cold-formed steel. *Thin-Walled Structures*, 48(10-11). - 2009. - p 752-762.
83. Moen C., Schafer B. W. Experiments on cold-formed steel columns with holes. *Thin-Walled Structures*, 46. - 2008. - p 1164-1182.
84. Moen C., Igusa T., Schafer B. W. Prediction of residual stresses and strains in cold-formed steel members. *Thin-Walled Structures*, 46. - 2008. - p 1274-1289.